8.D.1 با توجه به جدول زیر نشان دهید که استراتژی میکس این بازی، با قطعیت بازی کردن (a_2, b_2) است.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,-2	0,0	1,-1

در میکس استراتژی (a_4, b_4) بازی نمی‌شوند یا به عبارتی احتمالی که به آن‌ها اختصاص می‌دهند صفر است چراکه همواره استراتژی‌های را میکس می‌کنیم که پیامد بالایی را داشته باشند در حالیکه پی‌آفی که b_4 می‌دهد در مقابل پی‌آف سایر استراتژی‌های فرد دوم ناچیز است پس فرد دوم در هنگام میکس‌کردن به این استراتژی احتمال صفر می‌دهد. از طرفی فرد اول این موضوع را می‌داند پس حال که فرد دوم هرگز b_4 را بازی نمی‌کند، برای فرد اول a_4 یک استراتژی اکیدا مغلوب است پس هیچگاه با احتمال مثبت آن را بازی نمی‌کند. بنابراین در استراتژی میکس این دو استراتژی با احتمال صفر بازی می‌شوند.

روند کلی حل سوال به این شکل است که باید تمام استراتژی های میکس برای فرد دوم (یا فرد اول تفاوتی ندارد) را در نظر بگیریم و نشان دهیم که بازی کردن a_2 پیامد بزرگتری نسبت به سایر استراتژی‌های فرد اول می‌دهد سپس باتوجه به اینکه فرد اول فقط a_2 را بازی می‌کند بهترین پاسخ فرد دوم b_2 خواهد بود.

حالت اول : پس باتوجه به توضیح گفته شده فرض می کنیم یک میکس استراتژی وجود دارد که a_1 و a_3 با احتمالات مثبت p و $1-p$ بازی می‌شوند آنگاه پی‌آف انتظاری حاصل از هرکدام از این استراتژی‌ها برابر است. زیرا اگر a_1 بازی کند فرد دوم b_1 بازی می‌کند و فرد اول صفر نصیبش می‌شود و اگر a_3 بازی کند فرد دوم b_3 بازی می‌کند و صفر نصیبش می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که بازیکن دوم باید احتمال یکسانی به b_1 و b_3 بدهد (چرا؟ چون b_2 که پی‌آف یکسانی در هرر دو استراتژی به فرد ۱ می‌دهد پس برای اینکه پی‌آف انتظاری فرد اول از بازی a_1 و a_3 برابر باشد باید احتمال بازی‌کردن b_1 و b_3 برابر باشد) . پس بازیکن دوم وقتی میکس بازی می‌کند به b_1 و b_3 احتمال برابر مثلا α می‌دهد و b_2 را هم با احتمال $(1-2\alpha)$ بازی می‌کند (گفتیم b_4 هم هرگز در میکس بازی نمی‌شود). مطلوبیت انتظاری ناشی از بازی کردن استراتژی های a_1 و a_2 و a_3 برای فرد ۱ وقتی فرد دوم میکس بازی می‌کند به‌صورت زیر است:

$$a_1 \rightarrow 0(\alpha) + 2(1-2\alpha) + 7\alpha = 2(1-2\alpha) + 7\alpha$$

$$a_3 \rightarrow 7\alpha + 2(1-2\alpha)$$

$$a_2 \rightarrow 5\alpha + 3(1-2\alpha) + 5\alpha = 10\alpha + 3(1-2\alpha)$$

مشاهده می‌کنیم که که مطلوبیت انتظاری بازی کردن a_2 بیشتر از a_1 و a_3 است. بنابراین در یک میکس استراتژی برای فرد ۱، a_1 و a_3 نمی‌توانند با احتمالات مثبتی بازی شوند.

حالت دوم: حال فرض کنید یک میکس استراتژی وجود دارد که بازیکن ۱، a_1 و a_2 را با احتمالات اکیدا مثبت بازی کند. در این حالت استراتژی b_3 برای بازیکن دوم یک استراتژی اکیدا مغلوب است (نسبت به b_2) پس بازی نمی‌شود و احتمال صفر به آن می‌دهد. در این حالت بازیکن دوم اگر بخواهد میکس باز کند b_1 را با احتمال β و b_2 را با احتمال $(1-\beta)$ بازی می‌کند. مطلوبیت انتظاری بازیکن اول از بازی کردن a_1 و a_2 به صورت زیر خواهد بود:

$$a_1 \to 2(1-\beta) \qquad a_2 \to 5\beta + 3(1-\beta) > 2(1-\beta)$$

بنابراین در یک میکس استراتژی a_1 نمی‌تواند با احتمال مثبت بازی شود چون همیشه بازی کردن a_2 بهتر است.

حالت سوم: فرض کنید ی میکس استراتژی وجود دارد که در آن a_2 و a_3 با احتمال مثبت بازی می‌شوند آنگاه بازیکن دوم هرگز b_1 را بازی نمی‌کند چون استراتژی مغلوب است (توسط b_2) پس b_2 و b_3 را با احتمال γ و $(1-\gamma)$ بازی می‌کند. مطلوبیت حاصل از بازی کردن a_2 و a_3 برای نفر اول برابر است با:

$$a_3 \to 2\gamma \qquad a_2 \to 3\gamma + 5\,(1-\gamma) > 2\gamma$$

پس بازی کردن a_2 همیشه بهتر است. پس در یک میکس استراتژی بازیکن اول a_3 را با احتمال مثبت بازی نمی‌کند. بنابراین بازیکن اول همیشه در تعادل نش a_2 را بازی می‌کند و بازیکن دوم هم با دانستن این موضوع بهترین پاسخ خود را می‌دهد که b_2 است. پس بازی کردن (a_2, b_2) با قطعیت (احتمال یک)، تنها استراتژی نش این‌بازیست.

8.D.2 نشان دهید که اگر یک استراتژی پروفایل یکتا وجود داشته باشدکه از فرآیند حذف متوالی استراتژی‌های اکیدا مغلوب، باقی مانده باشد، آنگاه این استراتژی پروفایل یک تعادل نش است.

نشان خواهیم داد که هر تعادل نش باید در مجموعه S^∞ قرار داشته باشد (که مجموعه استراتژی‌هایی است که پس از فرآیند حذف متوالی استراتژی‌های اکیدا مغلوب باقی مانده‌اند). از آنجایی که فرض شده این مجموعه یکتاست (تنها یک عضو دارد) نتیجه زیر را ثابت خواهیم کرد:

فرض کنید $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_I^*)$یک تعادل نش (میکس) است و برعکس حکم مساله فرض می‌کنیم که در فرآیند حذف متوالی اکیدا غالب حذف شوند. فرض کنید i بازیکنی است که استراتژی آن اولین استراتژی حذف‌شده در فرآیند حذف متوالی است (در k امین دور حذف می‌شود). بنابراین یک σ_i و a_i وجود دارد بطوریکه:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(a_i, s_{-i}) \quad for\ \forall s_{-i} \in S_{-i}^{k-1} \quad (1)$$

a_i با احتمال مثبت $s_i^*(a_i)$ بازی می‌شود.

از آنجا که k اولین دوره‌ای است که در آن یک استراتژی حذف می‌شود پس $s_{-i}^* \in S_{-i}^{k-1}$ است چراکه s_{-i}^* در این دوره که یک استراتژی حذف شده‌است، عضور مجموعه استراتژی‌های باقی‌مانده است پس حتما دور قبل هم در این مجموعه حضور داشته است بنابراین چون گفتبم s_{-i}^* عضو S_{-i}^{k-1} است و رابطه (۱) هم برای هر $s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}$ برقرار است پس می‌توان نوشت:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}^*) > u_i(a_i, s_{-i}^*) \quad (2)$$

حال فرض کنید یک استراتژی s_i' وجود دارد که دقیقا s_i^* است فقط در هر احتمال $s_i^*(a_i$ ، a_i با σ_i جایگزین می‌شود پس داریم:

$$u_i(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) + s_i^*(a_i)[u_i(\sigma_i, s_{-i}^*) - u_i(a_i, s_{-i}^*)] > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$$

دقت شود که مطلوبیت ناشی از بازی کردن s_i' همان مطلوبیت ناشی از بازی‌کردن s_i^* است فقط چون a_i با σ_i جایگزین شده پس یک جزء به این مطلوبیت اضافه می‌شود که برابر با اختلاف مطلوبیت ناشی از بازی کردن a_i و σ_i است ضرب در احتمال که $s_i^*(a_i)$ است. با استفاده از رابطه (۲) می‌دانیم که عبارت داخل براکت اکیدا مثبت است پس $u_i(s_i', s_{-i}^*)$ بزرگتر است از $u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ که با فرض تعادل نش بودن s_i^* در تناقض است چراکه یک استراتژی یافتیم که مطلوبیت انتظاری بالاتری نسبت به s_i^* دارد. بنابراین استراتژی‌ای تعادل نش است که در فرآیند حذف متوالی حذف نشود و باقی بماند.

8.D.3 یک حراج دربسته قیمت اول رادر نظر بگیرید که دو خریدار وجود دارد. هر خریدار برای کالا ارزش v_i قائل است که برای هردو نفر دانسته است. هرکس پیشنهاد خود را در یک پاکت دربسته تقدیم می‌کند. وقتی پاکت‌ها باز شد کسی که پیشنهاد بالاتری داده باشد کالا را می‌برد و مقداری که پیشنهاد داده‌است را می‌پردازد. اگر پیشنهاد دوفرد یکسان باشد هرکدام با احتمال $\frac{1}{2}$ برنده می‌شوند. (دقت کنید پیشنهادها به دلار هستند)

الف) آیا هیچکدام از استراتژی‌ها اکیدا مغلوب هستند؟

ب) آیا هیچکدام از استراتژی‌ها مغلوب ضعیف هستند؟

ج) آیا یک تعادل نش وجود دارد؟ آن تعادل چیست؟ آیا یکتاست؟

حراج دربسته قیمت اول یک بازی همزمان است که استراتژی هرفرد بیدی است که می‌زند. b_1 بید نفر اول است و b_2 بید نفر دوم. حالات زیر برای این حراج وجود دارد:

$$b_1 > b_2 \rightarrow p1\ gets\ the\ object\ and\ pays\ b_1 \rightarrow u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1, u_2(b_1, b_2) = 0$$

$$b_2 > b_1 \rightarrow p2\ gets\ the\ object\ and\ pays\ b_2 \rightarrow u_1(b_1, b_2) = 0, u_2(b_1, b_2) = v_2 - b_2$$

$$b_1 = b_2 \rightarrow each\ gets\ the\ object\ with\ pr = \frac{1}{2}$$

$$u_1(b_1, b_2) = \frac{1}{2}(v_1 - b_1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{v_1 - b_1}{2}, u_2(b_1, b_2) = \frac{v_2 - b_2}{2}$$

الف) هیچ استراتژی اکیدا مغلوبی وجود ندارد. عکس نقیض: فرض کنید b_1 توسط b_1' اکیدا مغلوب است یعنی برای هر استراتژی فرد دوم داریم : $u_1(b_1', b_2) > u_1(b_1, b_2)$. حال b_2^* را به اینصورت در نظر می‌گیریم: $b_2^* = \max\{b_1, b_1'\} + 1$.

پس $b_2^* = b_1' + 1$ است. بنابراین $b_2^* > b_1$, $b_2^* > b_1'$ است. بنابراین $u_1(b_1', b_2^*) = u_1(b_1, b_2^*) = 0$ که با فرض بالا تناقض دارد (چون گفتیم برای هر استراتژی نفر دوم $u_1(b_1', b_2) > u_1(b_1, b_2)$ است در حالیکه در این مثال فرد دوم برنده می‌شود و مطلوبیت فرد ۱ برای هردو استراتژی b_1 و b_1' برابر است و صفر است).

پس چون به تناقض رسیدیم هیچ استراتژی اکیدا مغلوبی برای فرد ۱ وجود ندارد برای فرد ۲ هم به همین صورت اثبات می‌شود.

ب) ادعا می‌کنیم که هر استراتژی b_1 برای بازیکن ۱ مغلوب ضعیف است اگر $b_1 > v_1$ باشد:

$$b_2 < v_1 : u_1(v_1, b_2) = v_1 - v_1 = 0 \ , u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$b_2 = v_1 : u_1(v_1, b_2) = \frac{1}{2}(v_1 - v_1) = 0 \ , u_1(b_1, b_2) = 1/2(v_1 - b_1) < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$v_1 < b_2 < b_1 : u_1(v_1, b_2) = 0 \ , u_1(b_1, b_2) = v_1 - b_1 < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$v_1 < b_2 = b_1 : u_1(v_1, b_2) = 0 \ , u_1(b_1, b_2) = \frac{1}{2}(v_1 - b_1) < 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$b_1 < b_2 : u_1(v_1, b_2) = 0 \ , u_1(b_1, b_2) = 0 = u_1(v_1, b_2)$$

در تمامی موارد بالا $u_1(b_1, b_2) \leq u_1(v_1, b_2)$ است بنابراین اگر $b_1 > v_1$ باشد آنگاه هر استراتژی b_1 توسط v_1 مغلوب ضعیف است.

بطور مشابه هر استراتژی b_2 برای بازیکن دوم توسط v_2 مغلوب ضعیف است اگر $b_2 > v_2$ باشد.

حال فرض کنید $v_1 > 2$ باشد. ادعا می‌کنیم در این مورد $b_1 = 1$ بر $b_1' = 0$ بطور ضغیف غلبه می‌کند.

$$b_2 = 0 \to u_1(1,0) = v_1 - 1 \ , u_1(0,0) = \frac{1}{2}v_1 \to u_1(1,0) - u_1(0,0) = \frac{1}{2}v_1 - 1 < 0$$

$$b_2 = 1 \to u_1(1,1) = \frac{1}{2}(v_1 - 1) > 0, u_1(0,1) = 0$$

$$b_2 > 1 \to u_1(1, b_2) = 0 \ , u_1(0, b_2) = 0$$

در تمامی موارد بالا $u_1(1, b_2) \geq u_1(0, b_2)$ است.

در انتها فرض کنید $v_1 \epsilon \{1,2\}$باشد. ادعا می‌کنیم در این حالت $b_1 = v_1 - 1$ بر $b_1 = v_1$ بطور ضعیف غلبه می‌کند:

$$b_2 < v_1 - 1 \to u_1(v_1 - 1, b_2) = v_1 - (v_1 - 1) = 1 > 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$b_2 = v_1 - 1 \to u_1(v_1 - 1, b_2) = \frac{1}{2} > 0 = u_1(v_1, b_2)$$

$$b_2 > v_1 - 1 \to u_1(v_1 - 1, b_2) = 0 = u_1(v_1, b_2)$$

بنابراین در تمامی موارد بالا $u_1(v_1-1,b_2) \geq u_1(v_1,b_2)$ است. بطور مشابه برای نفر دوم نیز می‌توان نشان داد. اگر $v_2 > 2$ باشد آنگاه $b_2 = 1$ بر $b_2' = 0$ بطور ضعیف غلبه می‌کند. و اگر $v_2 > 1$ باشد آنگاه $b_2 = v_2 - 1$ بر $b_2' = v_2$ بطور ضعیف غلبه می‌کند.

ج) باید رابطه‌ی بهترین پاسخ را برای فرد ۱ تعریف می‌کنیم که از ماکسیمم کردن مطلوبیت فرد ۱ باتوجه به استراتژی فرد ۲ به‌دست می‌آید.

$$R_1(b_2) = \begin{cases} b_2+1 & b_2 < v_1 - 2 \\ \{b_2, b_2+1\} & b_2 = v_1 - 2 \\ \{b_2\} & b_2 = v_1 - 1 \\ \{0,1,2,\ldots,v_1\} & b_2 = v_1 \\ \{0,1,2,\ldots,b_2-1\} & b_2 > v_1 \end{cases}$$

برای فرد دوم هم به همین شکل می‌نویسیم:

$$R_2(b_1) = \begin{cases} b_1+1 & b_1 < v_2 - 2 \\ \{b_1, b_1+1\} & b_1 = v_2 - 2 \\ \{b_1\} & b_1 = v_2 - 1 \\ \{0,1,2,\ldots,v_2\} & b_1 = v_2 \\ \{0,1,2,\ldots,b_1-1\} & b_1 > v_2 \end{cases}$$

تعادل نش b_1^* و b_2^* ای است که در هردو best response وجود داشته باشد.

می‌توان ثابت کرد که تعادل نش همیشه وجود دارد و برای v_1 و v_2 های به‌اندازه کافی بزرگ یکتا نیست.

برای $v_1, v_2 \geq 2$ تعادل‌های نش به‌صورت زیر هستند:

$$if\ v_1 = v_2: (v_1,v_2),(v_1-1,v_2-1),(v_1-2\,,v_2-2)$$

$$if\ v_1 = v_2+1:\ (v_1-1,v_1-2),(v_1-2\,,v_1-2)$$

$$if\ v_2 = v_1+1:\ (v_2-2,v_2-1),(v_2-2\,,v_2-2)$$

$$v_1 > v_2+1: (v_1-x, v_1-x-1) \qquad 1 < x < v_1 - v_2$$

$$note\ if\ v_1 = v_2+2: (v_1-2, v_1-2)\ \ is\ also\ a\ NE$$

$$v_2 > v_1+1: (v_2-x-1, v_2-x) \qquad 1 < x < v_2 - v_1$$
$$note\ if\ v_2 = v_1+2: (v_2-2, v_2-2)\ \ is\ also\ a\ NE$$

در کل نش وجود دارد ولی یکتا نیست.

8.D.9 بازی زیر را در نظر بگیرید:

	LL	L	M	R
U	100,2	-100,1	0,0	-100,-100
D	-100,-100	100,-49	1,0	100,2

الف) اگر شما بازیکن ۲ بودید و تنها یکبار بازی را انجام می‌دادید و همچنین توانایی قول دادن و برقرار کردن ارتباط با بازیکن۱ را نداشتید کدام استراتژی را انتخاب می‌کردید؟

ب) تمام استراتژی‌های خالص و میکس این بازی را بنویسید.

ج) آیا استراتژی‌ای که در قسمت الف انتخاب کردید جزئی از یک استراتژی پروفایل تعادل نش است؟ آیا یک استرتژی rationalizable است؟

د) حال فرض کنید که برقراری ارتباط ممکن است آیا فکر می‌کنید که چیزی متفاوت از انتخاب خود در قسمت الف را بازی می‌کنید؟

الف) ریسک بازی کردن LL,L,R بالاست چون اگر L را بازی کند ممکن است ۴۹ واحد از دست بدهد یا ۱ واحد به‌دست آورد بنابراین چیزی که ممکن است به‌دست آورد در مقابل چیزی که از دست می‌دهد قابل توجه نیست برای LLو R نیز همینطور پس M را انتخاب می‌کند (در واقع مطلوبیت انتظاری حاصل از هرکدام از استراتژی‌ها را حساب می‌کند و بهترین آنها را انتخاب می‌کند).

ب) تعادل‌های نش خالص این بازی (u,LL) و (D,R) هستند.

تعادل‌های میکس:

فرد ۱ باید بین u و D با احتمال p و (1-p) میکس بازی کند. اما فرد ۲ حالات زیادی برای میکس کردن دارد که به‌صورت زیر هستند:

$$\{LL,L,M\}\ \ \{M,R\}\ \{L,R\}\{L,M\}\ \{LL,R\}\ \ \{LL,M\}\ \{LL.L\}\ \{LL,L,R\}\{LL,L,M,R\}\{L,M,R\}\{LL,M,R\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $\{LL.L\}$ جزیی از تعادل نش میکس است.

بازیکن دوم LLو L را با احتمال q و 1-q بازی می‌کند. بازیکن دوم باید وقتی که بازیکن اول میکس بازی می‌کند بین LLو L بی‌تفاوت باشد:

$$p(2)+(1-p)(-100)=p(1)+(1-p)(-49)\quad \rightarrow p=\frac{51}{52}$$

حال باید مطلوبیت انتظاری ناشی از بازی کردن LL,M,R را باتوجه به مقدار p به‌دست می‌آوریم:

$$u_2(LL)=u_2(L)=\frac{1}{26}\qquad u_2(M)=0\quad u_2(R)<0$$

بازیکن ۱ هم باید بین U و D وقتی که بازیکن دوم میکس بازی می‌کند بی‌تفاوت باشد:

$$q(100) + (1-q)(-100) = q(-100) + (1-q)(100) \quad \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$u_1(U) = u_1(D) = 0$$

پس $q = \frac{1}{2}$ و $p = \frac{51}{52}$ تعادل نش میکس این بازیست. حال باید نشان دهیم سایر میکس‌ها تعادل نش این بازی نیستند.

i. وقتی $\{LL, M\}$ را بازی کند، $p = \frac{50}{51}$ به دست می‌آید و با این مقدار مطلوبیت حاصل از بازی کردن استراتژی‌های فرد دوم برابر است با:

$$u_2(LL) = u_2(M) = 0 \, , u_2(L) = \frac{1}{51} > 0$$

پس چون مطلوبیت L بیش از $\{LL, M\}$ است، این ترکیب نمی‌تواند تعادل نش میکس این بازی باشد.

ii. اگر بازیکن ۲، $\{LL, R\}$ را بازی کند آنگاه $p = \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و مطلوبیت حاصل از بازی کردن هرکدام از استراتژی‌های فرد دو برابر است با:

$$u_2(LL) = u_2(R) = -49 \quad , u_2(M) = 0$$

پس این هم نمی‌تواند تعادل نش باشد.

iii. اگر بازیکن ۲ هرکدام از ترکیبات $\{L, M\}\{L, R\}\{M, R\}\{L, M, R\}$ را بازی کند آنگاه D بهترین پاسخ بازیکن۱ است که در جواب این انتخاب بهترین پاسخ بازیکن ۲، R است پس هیچکدام از این ترکیبات هم تعادل نش میکس این بازی نیستند.

iv. هرکدام از ترکیبات $\{LL, L, M, R\}\{LL, L, R\}\{LL, M, R\}$ هم نمی‌توانند تعادل نش باشند. مثلا برای $\{LL, M, R\}$ وقتی که فرد اول، u و D را با احتمال p و (1-p) بازی می‌کند $p = \frac{50}{51}$ به‌دست می‌آید. مطلوبیت حاصل از هرکدام از استراتژی‌ها را محاسبه می‌کنیم که به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u_2(LL) = u_2(M) = u_2(R) = 0 \quad , u_2(L) = \frac{1}{51} > 0$$

پس ترکیب یادشده نمی‌تواند یک تعادلنش باشد برای دو مورد دیگر هم به‌همین شکل به‌دست می‌آید.

v. برای $\{LL, L, M\}$هم مشابه حالت i محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که این هم تعادل نش نیست.

ج)استراتژی انتخاب شده در قسمت الف (M) جرئی از تعادل نش بالا نیست. اگر بازیکن ۱، $p = \frac{1}{2}$ را بازی کند آنگاه M بهترین پاسخ بازیکن دوم است چون مطلوبیت انتظاری بیشتری نسبت به سایر استراتژی‌ها می‌دهد.

د) اگر قبل از بازی امکان توافق وجود داشت آنگاه می‌توانند طوری رفتار کنند که هردو بیشترین منفعت را کسب کنند (یکی از تعادل‌های نش خالص بازی حاصل شود که هردو بیشترین پی‌آف را از بازی ببرند یعنی (u,LL) و (D,R) را انتخاب کند یعنی بازیکن ۲، LL یا R را انتخاب می‌کند و دیگر M را انتخاب نمی‌کند.

8.E.1 موقعیت استراتژیک زیر را در نظر بگیرید. دو لشکر رقیب می‌خواهند یک جزیره را تصرف کنند. ژنرال هر لشکر می‌تواند حمله یا عدم حمله را انتخاب کند . بعلاوه هر لشکر با احتمال برابر ضعیف یا قوی است و تایپ هر لشکر فقز برای ژنرال همان لشکر دانسته است. پی‌آف انتظاری به صورت زیر است: ارزش جزیره اگر تصرف شود M است. هر لشکر می‌تواند جزیره را با حمله کردن زمانی که رقیبش حمله نمی‌کند یا با حمله کردن زمانی که رقیبش حمله می‌کند ولی ضعیف است و خودش قوی، تصرف کند.

اگر هردو لشکر حمله کنند و هردو قوی باشند هیچکس جزیره را تصرف نمی‌کند. هرلشکر برای حمله هزینه‌ای می‌پردازد که اگر قوی باشد s است و اگر ضعیف باشد w است که $s < w$ است. هیچ هزینه‌ای برای حالتی که رقیب حمله نکرده وجود ندارد. تمام تعادل‌های نش بیزی این بازی را بیابید.

برای هر بازیکن باتوجه به تایپ آن چهار استراتژی وجود دارد:

AA: چه ضعیف باشد چه قوی حمله کند.

AN: اگر قوی باشد حمله می‌کند و اگر ضعیف باشد حمله نمی‌کند.

NA: اگر قوی باشد حمله نمی‌کند و اگر ضعیف باشد حمله می‌کند.

NN: تحت هیچ شرایطی حمله نمی‌کند.

پی‌آف انتظاری هر جفت از استراتژی‌ها در جدول زیر آمده است:

دقت شود در حالتی که حمله نکند چیزی به‌دست نمی‌آورد و هزینه‌ای هم نخواهد پرداخت پس برای استراتژی فرد هنگامی که NN را بازی می‌کند پی‌آف صفر حاصل می‌شود پی آف حاصل از بازی‌کردن (AA,AA) برای بازیکن اول به‌صورت زیر حساب می‌شود (توجه شود هردو لشکر در هر شرایطی حمله می‌کنند:

خودش قوی رقیب قوی	خودش قوی رقیب ضعیف	خودش ضعیف رقیب قوی	هردو ضعیف	
$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)s +$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(M-s) +$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)w +$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)w$	$=\frac{M}{4}-\frac{s+w}{2}$

برای سایر حالات هم به‌همین صورت حساب می‌شود:

	AA	AN	NA	NN
AA	$\frac{M}{4}-\frac{s+w}{2},\frac{M}{4}-\frac{s+w}{2}$	$\frac{M}{2}-\frac{s+w}{4},\frac{M}{4}-\frac{s}{2}$	$\frac{3M}{4}-\frac{s+w}{4},-\frac{w}{2}$	$M,0$
AN	$\frac{M}{4}-\frac{s}{2},\frac{M}{2}-\frac{s+w}{4}$	$\frac{M-s}{4},\frac{M-s}{4}$	$\frac{M}{2}-\frac{s}{4},\frac{M-w}{4}$	$\frac{M}{2},0$
NA	$-\frac{w}{2},\frac{3M}{4}-\frac{s+w}{4}$	$\frac{M-w}{4},\frac{M}{2}-\frac{s}{4}$	$\frac{M-w}{4},\frac{M-w}{4}$	$\frac{M}{2},0$
NN	$0,M$	$0,\frac{M}{2}$	$0,\frac{M}{2}$	$0,0$

برای یافتن تعادل‌های نش بیزی این بازی باید ۴ حالت زیر را در نظر بگیریم:

حالت اول: $M > w > s \ and \ w > \frac{M}{2} > s$

در این حالت تعادل‌های نش بیزی بازی (AA,AN) و (AN,AA) خواهند بود.

حالت دوم: $M > w > s \ and \ \frac{M}{2} < s$

در این حالت تعادل‌های نش بیزی بازی (AA,NN) و (NN,AA) خواهند بود.

حالت سوم: $w > M > s \ and \ \frac{M}{2} < s$

در این حالت تعادل‌های نش بیزی بازی (AN,AN) ، (AA,NN) و (NN,AA) خواهند بود.

حالت چهارم: $w > M > s \ and \ \frac{M}{2} > s$

در این حالت تعادل‌های نش بیزی بازی (AA,AN) ، (AN,AA) و (AN,AN) خواهند بود.