۴.B.۲ : نشان دهید که اگر رابطه ترجیحات ≿ بر روی $\mathcal{L}$ توسط تابع مطلوبیتی نظیر $U(\cdot)$ که به شکل مطلوبیت انتظاری است قابل نمایش باشد، در اینصورت (≿) اصل موضوع استقلال را برقرار می‌سازد.

حل: برای نشان دادن برقراری اصل باید نشان دهیم $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L} \;\&\; \alpha \in (0,1)$

$$L \succsim L' \iff \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''$$

بنا به فرض سوال رابطه ≿ با یک تابع مطلوبیت VNM نمایش داده شود. در اینصورت اگر $L=(p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$

$$U(L) = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i$$

اکنون ۳ لاتاری دلخواه $L=(p_1, \dots, p_N)$ ، $L'=(p'_1, \dots, p'_N)$ ، $L''=(p''_1, \dots, p''_N)$ را در فضای لاتاری $\mathcal{L}$

و عدد $\alpha \in (0,1)$ را به طور دلخواه در نظر می‌گیریم. در اینصورت طبق تعریف:

$$L \succsim L' \iff \sum_{i=1}^{N} u_i p_i \geq \sum_{i=1}^{N} u_i p'_i$$

$$\iff \alpha\Big(\sum_i u_i p_i\Big) \geq \alpha\Big(\sum_i u_i p'_i\Big) \qquad 0<\alpha \text{ طرفین را در } \alpha \text{ ضرب}$$

هر دو طرف + با یک مقدار مساوی:

$$\iff \underbrace{\alpha\Big(\sum_i u_i p_i\Big)} + \underbrace{(1-\alpha)\Big(\sum_i u_i p''_i\Big)} \geq \underbrace{\alpha\Big(\sum_i u_i p'_i\Big)} + \underbrace{(1-\alpha)\Big(\sum_i u_i p''_i\Big)}$$

$$\iff \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''$$

لذا چون در تمام مراحل ⟺ صادق بود می‌توان گفت:

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in (0,1);$$

$$L \succsim L' \iff \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''$$

که یعنی اصل موضوع استقلال برقرار است.

subject: date:

6.C.1 : نشان دهید اگر بیمه actuarially fair نباشد [یعنی $q > \pi$]، افراد به صورت کامل بیمه نخواهند شد.

حل ۱. برهان خلف: فرض کنیم افراد به صورت کامل بیمه شوند، یعنی $\alpha = D > 0$: در این صورت مسئله ی خود را می‌نویسیم:

$$\max_{\alpha} \underbrace{(1-\pi)u(w-\alpha q)}_{\text{با احتمال } 1-\pi \text{ حادثه اتفاق نمی‌افتد}} + \underbrace{\pi u(w-\alpha q-D+\alpha)}_{\text{با احتمال } \pi \text{ حادثه پیش می‌آید}}$$

α: تعداد واحدهای بیمه

FOC:

$$[\alpha]: -q(1-\pi)u'(w-\alpha q)+\pi(1-q)u'(w-D+\alpha(1-q))$$

$$\overset{\alpha=D}{=} -q(1-\pi)u'(w-Dq)+\pi(1-q)u'(w-Dq)$$

$$= u'(w-Dq)\left[-q(1-\pi)+\pi(1-q)\right]$$

$$= u'(w-Dq)\left[-q+\cancel{q\pi}+\pi-\cancel{\pi q}\right]$$

$$= u'(w-Dq)\left[\pi-q\right]$$

چون $D > 0$ = α، باید این عبارت در $\alpha = D$ برابر صفر شود [شرط مرتبه اول] اما طبق مفروضات سوال، $q > \pi$، لذا $\pi - q < 0$. از طرفی چون $u(.)$ تابع اکیداً مقعر است، $u'(w-Dq) \overset{>}{\neq} 0$، لذا داریم:

$$u'(w-Dq)\left[\pi-q\right] < 0$$

لذا شرط مرتبه اول برقرار نمی‌شود و فرض خلف باطل، و حکم ثابت است. □

subject :   date :

حل

۶.C.۳ ثابت کنید که چهار شرط قضیه ۶.C.۱ معادل هستند. راهنمایی: ابتدا (ج)، (ب) و (iii) معادل نشان داده شد.

سپس (ب) نشان دهید (د)، (الف) را ایجاب می‌کند و (ب) ایجاب می‌کند $u(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)\geq\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}u(y)$

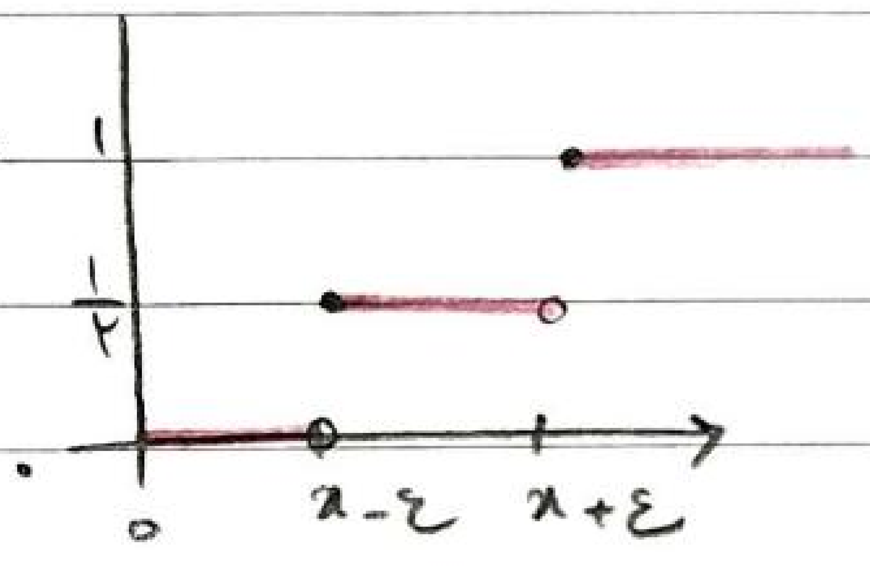
برای هر x و y، که در واقع همان شرط (iii) کافی است.

حل: از فرض می‌دانیم شرط (د) برقرار است. نشان می‌دهیم شرط (الف) نیز باید برقرار باشد. برای این منظور، عدد دلخواه $x\in\mathbb{R}$

و $\varepsilon>0$ را در نظر می‌گیریم و تابع توزیع تجمعی $F(\cdot)$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که طبق آن احتمال وقوع $x-\varepsilon$، همچنین احتمال وقوع $x+\varepsilon$ برابر $\frac{1}{2}$

باشد. یعنی:

$$pr(x+\varepsilon)=pr(x-\varepsilon)=\frac{1}{2}\Rightarrow F(z)=$$

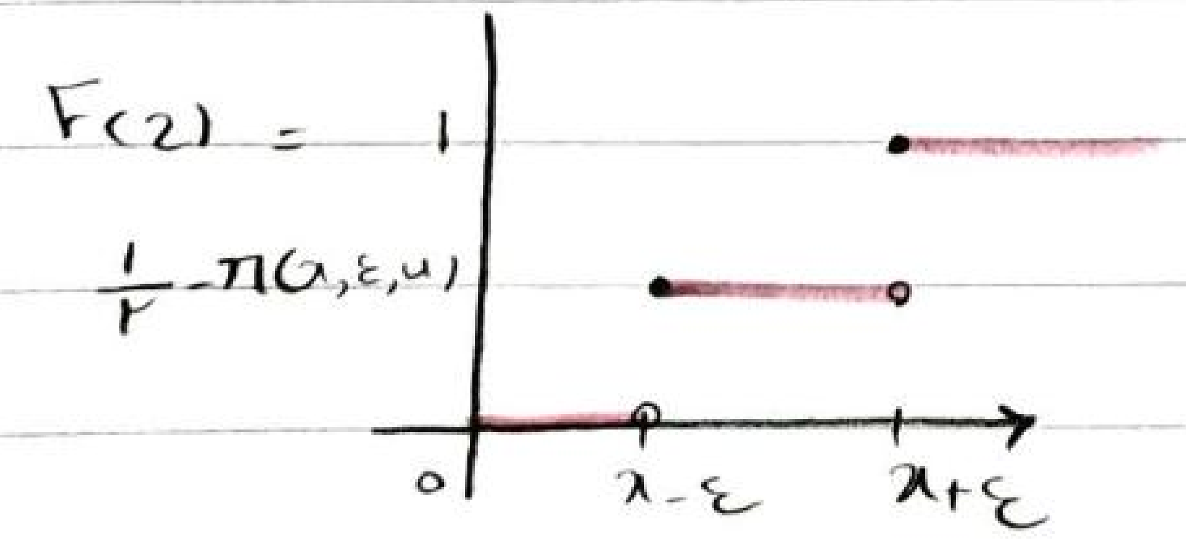


$$\Rightarrow F(z)=\begin{cases}0 & z<x-\varepsilon\\ \frac{1}{2} & x-\varepsilon\leq z<x+\varepsilon\\ 1 & z\geq x+\varepsilon\end{cases}$$

همچنین $F_{\varepsilon}(\cdot)$ را به عنوان تعریف می‌کنیم که طبق آن احتمال وقوع $x-\varepsilon$ برابر $\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)$ و احتمال وقوع

$x+\varepsilon$ برابر $\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)$ باشد. یعنی:

$$pr(x+\varepsilon)=\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)$$
$$pr(x-\varepsilon)=\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)$$

$\rightarrow$ 

$$\Rightarrow F(z)=\begin{cases}0 & z<x-\varepsilon\\ \frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u) & x-\varepsilon\leq z<x+\varepsilon\\ 1 & z\geq x+\varepsilon\end{cases}$$

در اینصورت

$$\int z\,dF(z)=\frac{1}{2}(x-\varepsilon)+\frac{1}{2}(x+\varepsilon)=x$$

از طرفی طبق (د) و تعریف ریسک گریز

$$\int u(z)\,dF(z)\leq u\left(\int z\,dF(z)\right)=u(x)\overset{*}{=}\int u(z)\,dF_{\varepsilon}(z)$$

$$* \quad \int u(z)\,dF_{\varepsilon}(z)=\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon)+\left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon)=u(x)$$

اما با توجه به تعریف $F(.)$ داریم:

$$\int u(z)\,dF(z) = \frac{1}{2}u(x-\varepsilon)+\frac{1}{2}u(x+\varepsilon)$$

و با توجه به تعریف $F_\varepsilon(.)$ داریم:

$$\int u(z)\,dF_\varepsilon(z) = \left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon)+\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon)$$

لذا با توجه به نامساوی صفحه قبل می‌توان نوشت:

$$\cancel{\frac{1}{2}u(x-\varepsilon)}+\cancel{\frac{1}{2}u(x+\varepsilon)} \le \cancel{\frac{1}{2}u(x-\varepsilon)}-\pi(x,\varepsilon,u)u(x-\varepsilon)+\cancel{\frac{1}{2}u(x+\varepsilon)}+\pi(x,\varepsilon,u)u(x+\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \pi(x,\varepsilon,u)\left[u(x+\varepsilon)-u(x-\varepsilon)\right]\ge 0$$

اما چون $u(.)$ صعودی است، $u(x+\varepsilon)-u(x-\varepsilon)>0$ لذا باید داشته باشیم:

$$\pi(x,\varepsilon,u)\ge 0 \qquad \forall\, x,\varepsilon$$

یعنی شرط (iv) برقرار است.

اکنون قسمت دوم اثبات را انجام می‌دهیم. فرض کنیم شرط (iv) برقرار است. اعداد دلخواه $z,y\in\mathbb{R}$ را به عنوان تعریف می‌کنیم که $y>z$. پس تعریف می‌کنیم: $x=\frac{y+z}{2}$ و $0<\varepsilon=\frac{y-z}{2}$. در این صورت x وسط y, z است و لذا $y=x+\varepsilon$ و $z=x-\varepsilon$ و نیز طبق تعریف equity premium داریم:

$$u(x)=\left(\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(\overset{x+\varepsilon}{y})+\left(\frac{1}{2}-\pi(x,\varepsilon,u)\right)u(\overset{x-\varepsilon}{z})$$

$$=\frac{1}{2}u(y)+\frac{1}{2}u(z)+\pi(x,\varepsilon,u)\left[u(y)-u(z)\right]$$

اکنون، طبق (iv) $\pi(x,\varepsilon,u)\ge 0$ و طبق صعودی بودن $u(.)$، $u(y)-u(z)\ge 0$. پس عبارت $\pi(x,\varepsilon,u)\left[u(y)-u(z)\right]\ge 0$. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}u(y)+\frac{1}{2}u(z)\le \frac{1}{2}u(y)+\frac{1}{2}u(z)+\pi(x,\varepsilon,u)\left[u(y)-u(z)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}u(y)+\frac{1}{2}u(z)\le u(x)=u\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$$

که طبق راهنمایی برابر برقراری شرط (iii) کافی است. لذا شرط‌ها برقرار و اثبات کامل می‌شود. $\square$

$\boxed{۶.C.۴}$. سؤال: طبق قضیه ۶.C.۲ : (a) معادل بودن شرایط (ii) و (iii) را ثابت کنید.
(b) معادل بودن شرایط (iii) و (v) را ثابت کنید.

ص) قضیه ۶.C.۲ : تعاریف (i) تا (v) از اینطوری ریسک گریزتر معادل هم هستند. [$u_2(\cdot)$ ریسک گریزتر از $u_1(\cdot)$ است]

i) $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$ برای هر x

ii) یک تابع مقعر وجود دارد که $u_2(x)=\psi(u_1(x))$ $\forall x$. یعنی $u_2(\cdot)$ یک تبدیل مقعر از $u_1(\cdot)$ و از آن مقعرتر است.

iii) $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$ برای هر $F(\cdot)$ دلخواه

iv) برای هر x و ε دلخواه، $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$

v) اگر $\int u_2(x)\,dF(x) \geq u_2(\bar{x})$ آنگاه $\int u_1(x)\,dF(x) \geq u_1(\bar{x})$ برای هر $F(\cdot)$ و $\bar{x}$.

اثبات قسمت (a) را ثابت میکنیم: فرض میکنیم شرط (ii) برقرار باشد. نشان میدهیم شرط (iii) نیز برقرار است.

تابع توزیع جمع دلخواه $F(\cdot)$ را در نظر میگیریم. طبق خاصیت (ii) داریم $u_2(x)=\psi(u_1(x))$ $\forall x$.

چون این خاصیت برای هر x دلخواه برقرار است، میتوان به جای x قرار داد: $c(F,u_2)$. لذا:

$$\psi(u_1(c(F,u_2))) = u_2(c(F,u_2)) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{طبق تعریف } c(F,u_2)}}{=} \int u_2(x)\,dF(x) = \int \psi(u_1(x))\,dF(x)$$

طبق خاصیت تابع مقعر و چون ψ تابع مقعر است: [این خاصیت از نامساوی جنسن Jensen میآید]

$$\int \psi(u_1(x))\,dF(x) \leq \psi \int (u_1(x))\,dF(x)$$

$$\Rightarrow \psi(u_1(c(F,u_2))) \leq \psi \int (u_1(x))\,dF(x)$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{چون } \psi \text{ صعودی}} u_1(c(F,u_2)) \leq \underbrace{\int u_1(x)\,dF(x)}_{\text{تعریف } u_1(c(F,u_1))} \Rightarrow u_1(c(F,u_2)) \leq u_1(c(F,u_1))$$

اما چون u_1 صعودی است با برابر بودن دو طرف در مورد ارزش‌های $u_1(\cdot)$ هم حفظ می‌شوند لذا:

$$C(F,u_2) \leq C(F,u_1)$$

که همان شرط (iii) است. یعنی فرد با تابع مطلوبیت دوم دارای کمترین پول معادل مطمئن است و حاضر است از لاتاری بیرون برود یعنی وی ریسک‌گریزتر است.

دقت کنید که اثبات استلزام نمی‌شود و باید برعکس را هم ثابت کنیم یعنی (iii) به (ii). برای این کار فرض می‌کنیم (iii) برقرار است. ثابت می‌کنیم (ii) نیز برقرار خواهد بود. توجه داریم که چون $u_1(\cdot)$ و $u_2(\cdot)$ به صورت ordinally یکسان هستند [یعنی در هر دو، مقادیر بیشتر به مقادیر بیشتر تخصیص داده می‌شود] همواره یک تابع صعودی $\psi(\cdot)$ وجود دارد که $u_1(\cdot)$ را به $u_2(\cdot)$ تبدیل کند یعنی $u_2(x) = \psi(u_1(x))$ [نکته آن در صفحه ۱۹۱ کتاب مس‌کولل]. لذا کافی است ثابت کنیم این تابع $\psi(\cdot)$ مقعر است. به عبارتی کافی است ثابت کنیم: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in [0,1]$

$$\psi(\lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_1(y)) \geq \lambda \psi(u_1(x)) + (1-\lambda)\psi(u_1(y))$$

برای اثبات آن تابع توزیع تجمعی $F(\cdot)$ را به صورتی تعریف می‌کنیم که به x احتمال λ و به y احتمال $1-\lambda$ را اختصاص دهد.

$$u_1(C(F,u_1)) = \int u_1(x)\,dF(x) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_1(y)$$

$$\Rightarrow u_1(C(F,u_1)) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_1(y) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \psi(u_1(C(F,u_1))) = u_2(C(F,u_1)) = \psi(\lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_1(y))$$

از طرفی طبق (iii): $\lambda \psi(u_1(x)) = \lambda u_2(x)$ و $(1-\lambda)\psi(u_1(y)) = (1-\lambda) u_2(y)$

$$\Rightarrow \lambda \psi(u_1(x)) + (1-\lambda)\psi(u_1(y)) = \lambda u_2(x) + (1-\lambda) u_2(y) = \int u_2(x)\,dF(x) \quad (2)$$

$$= u_2(C(F,u_2))$$

صحیح (iii) $c(F,u_2) \le c(F,u_1)$. لذا چون $u_2(.)$ صعودی است:

$$u_2(c(F,u_2)) \le u_2(c(F,u_1))$$

$$\xrightarrow[\text{②},]{\text{①}\ b} \psi(\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_1(y)) \ge \lambda \psi(u_1(x)) + (1-\lambda)\psi(u_1(y))$$

که به معنی تقعر ψ و برقراری (iii) است، لذا حکم قسمت (a) حاصل می‌شود.

جواب قسمت (b) ابتدا ثابت می‌کنیم (iii) $\Leftarrow$ (v). یعنی فرض می‌کنیم (iii) درست است، ثابت می‌کنیم (v) هم برقرار است. اگر داشته باشیم $\int u_2(x)dF(x) \ge u_2(\bar{x})$، آنگاه طبق تعریف $u_2(c(F,u_2))$ داریم:

$$u_2(c(F,u_2)) \ge u_2(\bar{x}) \xrightarrow{u_2(.)\ \text{صعودی}} c(F,u_2) \ge \bar{x}$$

$$\xrightarrow{(iii),\,b} c(F,u_1) \ge c(F,u_2) \ge \bar{x} \Rightarrow c(F,u_1) \ge \bar{x} \xrightarrow{u_1\ \text{صعودی}} u_1(c(F,u_1)) \ge u_1(\bar{x})$$

$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف}} \int u_1(x)dF(x) \ge u_1(\bar{x})$$

و چون $F(.)$ و $\bar{x}$ دلخواه بودند، خاصیت (v) برقرار است.

برعکس فرض می‌کنیم خاصیت (v) برقرار است، نشان می‌دهیم خاصیت (iii) نیز برقرار باشد:

می‌دانیم $\int u_2(x)dF(x) = u_2(c(F,u_2))$ لذا $c(F,u_2)$ به عنوان $\bar{x}$ در شرط $\int u_2(x)dF(x) \ge u_2(\bar{x})$ صدق می‌کند [شک نکنیم که اگر $x=y$ آنگاه x,y در شرط $x \le y$ و همچنین در شرط $y \ge x$ صادق هستند]

لذا داریم $\int u_2(x)dF(x) \ge u_2(c(F,u_2))$. لذا طبق (v) داریم $\int u_1(x)dF(x) \ge u_1(c(F,u_2))$

$$\overset{\text{طبق تعریف}}{=} u_1(c(F,u_1))$$

$$\Rightarrow u_1(c(F,u_1)) \ge u_1(c(F,u_2)) \xrightarrow[\text{صعودی است}]{\text{چون } u_1(.)} c(F,u_1) \ge c(F,u_2)$$

لذا شرط (iii) برقرار است و اثبات (b) نیز کامل می‌شود. □

maxnote

subject :   date :

۶.C.۷ ثابت کنید که در قضیه ۶.C.۲ ، شرط b (iii) شرط b (iv) ، شرط a (iv) را ایجاب می‌کند.

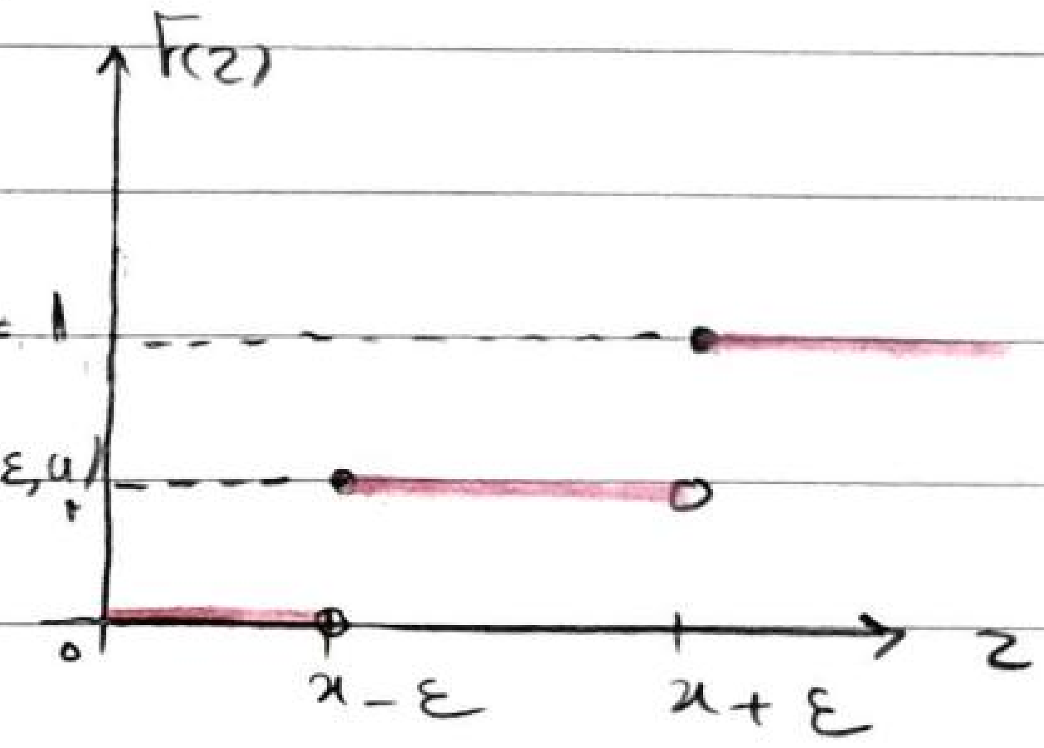
ابتدا فرض می‌کنیم شرط (iii) برقرار است. نشان می‌دهیم (iv) نیز باید برقرار باشد. $x \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ را به طور دلخواه در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $F(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی باشد که طبق آن احتمال دریافت پول $x-\varepsilon$ برابر و احتمال دریافت $x-\varepsilon$ تا $x+\varepsilon$ برابر

$\frac{1}{2}+\pi(x,\varepsilon,u_2)$ و برای مقادیر بیشتر از $x+\varepsilon$ برابر یک باشد [دقت کنید که تابع توزیع تجمعی است] یعنی:

$$\begin{cases} prob(x-\varepsilon) = \frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_2) \\ prob(x+\varepsilon) = \frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_2) \end{cases} \Rightarrow F(z) =$$

$$\frac{1}{2} - \pi(\cdot) + \frac{1}{2} + \pi = 1$$



پس می‌توان $F(\cdot)$ را به صورت زیر نوشت:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < x-\varepsilon \\ \frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_2) & x-\varepsilon \le z < x+\varepsilon \\ 1 & z \geq x+\varepsilon \end{cases}$$

حال می‌توان نشان داد که با توجه به این $F(\cdot)$ ، $c(F,u_2) = x$. چرا؟ چون طبق تعریف:

$$u_2(c(F,u_2)) = \int u_2(x)\, dF(x) = \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_2)\right) u_2(x-\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_2)\right) u_2(x+\varepsilon)$$

که طبق تعریف برابر با $u_2(x)$ است. دقت کنید که در محاسبه $\int u_2(x)\, dF(x)$ از تعریف تابع مطلوبیت VNM استفاده شده.

پس $c(F,u_2) = x$. طبق (iii) ، $c(F,u_2) \le c(F,u_1) \Rightarrow x \le c(F,u_1)$. با اعمال $u_1(\cdot)$ بر

طرفین داریم: $u_1(c(F,u_1)) \geq u_1(x)$. قدم بعدی آن است که $u_1(x)$ و $u_1(c(F,u_1))$ را حساب کنیم:

$$u_1(c(F,u_1)) = \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_2)\right) u_1(x-\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_2)\right) u_1(x+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1(c(F,u_1)) = \frac{1}{2} u_1(x+\varepsilon) + \frac{1}{2} u_1(x-\varepsilon) + \pi(x,\varepsilon,u_2)\left(u_1(x+\varepsilon) - u_1(x-\varepsilon)\right)}$$

و طبق تعریف $\pi(x,\varepsilon,u_1)$ می‌توان نوشت:

$$u_1(x) = \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u_1)\right) u_1(x-\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u_1)\right) u_1(x+\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{2} u_1(x-\varepsilon) + \frac{1}{2} u_1(x+\varepsilon) + \pi(x,\varepsilon,u_1)\left[u_1(x+\varepsilon) - u_1(x-\varepsilon)\right]$$

ه ⇐ ۱) از اینکه داشتیم $u_1(c(F,u_1)) \geq u_1(x)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\cancel{\tfrac{1}{2} u_1(x+\varepsilon)} + \cancel{\tfrac{1}{2} u_1(x-\varepsilon)} + \pi(x,\varepsilon,u_2)\left[u_1(x+\varepsilon) - u_1(x-\varepsilon)\right]$$

$$\geq \cancel{\tfrac{1}{2} u_1(x-\varepsilon)} + \cancel{\tfrac{1}{2} u_1(x+\varepsilon)} + \pi(x,\varepsilon,u_1)\left[u_1(x+\varepsilon) - u_1(x-\varepsilon)\right]$$

$$\Rightarrow \pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$$

یعنی شرط (۷) نیز برقرار است.

ه ⇐ ۷) فرض می‌کنیم شرط (۷) برقرار است. نشان می‌دهیم شرط (ه) نیز برقرار باشد. شرط (۷) بیان می‌کند که $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$. از طرفی می‌دانیم $\pi(x,0,u_1) = \pi(x,0,u_2) = 0$. چرا؟ چون واضح است در تعریف $\pi(x,\varepsilon,u)$، ε را صفر بگذاریم. پس تابعی داریم که در $\varepsilon=0$، $\pi(x,0,u_2)$ و $\pi(x,0,u_1)$ باهم برابر بوده و به ازای هر مقدار مثبت ε، $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$. این یعنی ممکن است که اگر در ابتدا از صفر بالاتر برویم، $\pi(x,\varepsilon,u_2)$ بیشتر خواهد شد از $\pi(x,\varepsilon,u_1)$. یعنی باید به ازای یک تغییر خیلی کوچک در ε که بیشتر از صفر شود، $\pi(x,\varepsilon,u_2)$ تغییر بزرگتری کند نسبت به $\pi(x,\varepsilon,u_1)$. [چون در $\varepsilon=0$ باهم برابر و در بعد از آن بزرگتر از $\pi(x,\varepsilon,u_1)$ است] لذا داریم:

$$\frac{\partial \pi(x,0,u_2)}{\partial \varepsilon} \geq \frac{\partial \pi(x,0,u_1)}{\partial \varepsilon}$$

از طرفی چون $r_A(x,u_i) = 4\dfrac{\partial \pi(x,0,u_i)}{\partial \varepsilon}$، می‌توان گفت $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$ و لذا شرط (ه) برقرار است. ∎