انتخاب در شرایط نااطمینانی

غلامرضا کشاورز حداد

اقتصاد خرد ۲

زمستان ۱۳۹۴


MEHR NEWSAGENCY
Photo: Omid Shekari

نحوه ارزیابی

- ساعت تشکیل کلاس: یکشنبه‌ها و سه‌شنبه‌ها ساعت ۰۹:۳۰ تا ۱۱:۰۰
- منبع درس: فصل ۶ تا ۱۳ اقتصاد خرد Andreu Mas-Colell
- دستیاران آموزشی:
  - آرین شهبازیان
  - امیرمحمد تهمتن
  - نیما رفیع‌زاده
- نحوه ارزیابی:
  - امتحان میان‌ترم .... ۶ نمره
  - امتحان پایان‌ترم .... ۶ نمره
  - کوییز (چهار کوییز) .... ۴ نمره
  - تمرین و حضور فعال در کلاس تمرین......... ۴ نمره

فهرست مطالب

مقدمه

- در درس خرد ۱ ، انتخاب‌هایی را مطالعه کردیم که منجر به نتایج کاملاً مطمئن می‌گردید.
- با این حال، در دنیای واقعی، بسیاری از تصمیم‌های مهم اقتصادی با عنصری از ریسک درگیر می‌شوند.
- گزینه های غیرمطمئن دارای ساختاری هستند که مي‌توانیم آنها را برای مقیدکردن ترجیحاتی که فرد عقلانی می تواند داشته باشد، مورد استفاده قرار دهیم.
- بهره مندی از مزیت این ساختار، امکان استخراج نتایج قویتری را برای ما فراهم می‌سازد.

توصیف گزینه‌های ریسکی

- تصور کنید که یک تصمیم گیرنده با یک انتخاب از میان تعدادي از گزینه‌های ریسکی روبرو باشد. هر گزینه ریسکی ممکن است منتج به یکی از نتایج بشود.
- اما این نتیجه‌ای که در واقع تحقق پیدا می‌کند، در هنگام تصمیم گیری فرد تصمیم گیرنده، باید نامطمئن باشد.
- مجموعه تمام نتایج ممکن را به وسیله نشان می‌دهیم. این نتایج می‌توانند اشکال بسیاری را به خود بگیرد.
- برای مثال آنها می‌توانند سبدهاي مصرفی باشند. در این حالت مجموعه مصرفی تصمیم گیرنده است. به عبارت دیگر، نتایج می‌توانند اشکال ساده‌تر از دستاوردهای پولی را بگیرند.

- تعریف ۱-B-۶:

- یک بخت‌آزمايي ساده فهرستي از $L = (p_1, p_2, ..., p_N)$ است که با $p_n \geq 0$ برای تمام nها و $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$ که در آن p_n به عنوان احتمال وقوع دستاورد n تفسیر می‌گردد.

- به بیان دیگر یک لاتاری قانون توزیع پیامدهای مختلف در یک وضعیت نامطمئن است که تنها از نظر مقدار احتمال وقوع هریک از این پیامدها از یک لاتاری دیگر متمایز می‌گردد.

- این تعریف به هیچ وجه محدود کننده نیست. دو لاتاری L_1 و L_2 را در نظر بگیرید.

L_1

p_{11}	p_{12}	p_{13}
c_{11}	c_{12}	c_{13}

L_2

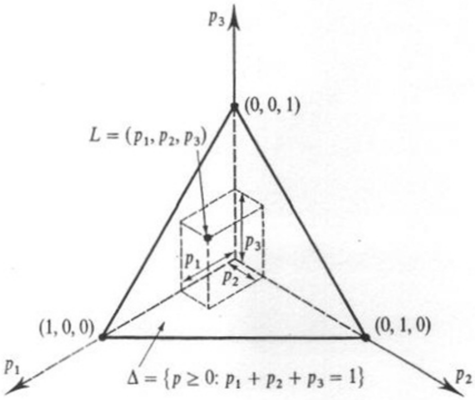
p_{21}	p_{22}	p_{23}
c_{21}	c_{22}	c_{23}

- این دو لاتاری بوسیله دو لاتاری دیگر می‌تواند نشان داده شود که این دولاتاری جدید تنها از نظر مقادیر احتمالها از هم متمایز هستند.

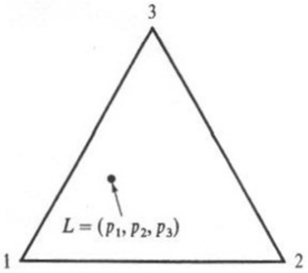
p_{11}	p_{12}	p_{13}	0	0	0
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}

0	0	0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}

- نمایش فضای لاتاری با استفاده از مثلثهای سه بعدی a و دو بعدی b



(a)



(b)

- تعریف ٦-B-٢:
- در k لاتاری ساده $L^k = (p_1^k, p_2^k, ..., p_N^k)$ ، k=١, ٢, ..., K و احتمال‌های $\alpha_k \geq 0$ با $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$ ، لاتاری مرکب $(L_1, L_2, ..., L_K, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ گزینه‌هاي ريسكي هستند که که لاتاری ساده L_K را با احتمال α_k نتیجه می‌دهند.

$$L_1 = (p_1^1, \cdots, p_N^1) \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

$$L_2 = (p_1^2, \cdots, p_N^2)$$

$$(L_1, L_2; \alpha_1, \alpha_2)$$

- اگر داخل L_1 دو گزینه (N=٢) باشد، آنگاه احتمال وقوع گزینه اول در L_1 و L_2 عبارت است از:

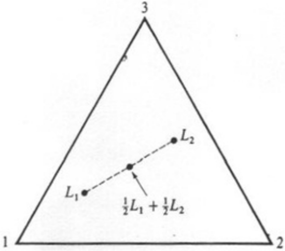
$$p_1 = \alpha_1 p_1^1 + \alpha_1 p_1^2$$

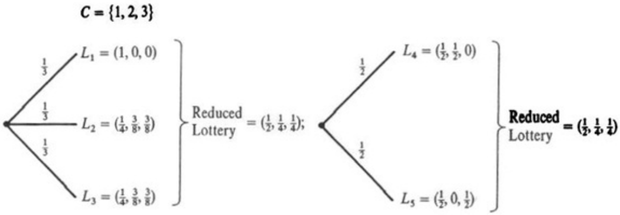
- برای هر لاتاری مرکب $(L_1, L_2, ..., L_K, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ ، می‌توانیم لاتاری تحویل یافته) خلاصه شده (متناظر را بصورت لاتاری ساده $L = (p_1, p_2, ..., p_N)$ محاسبه کنیم که همان توزیع آخري بر رخدادها را تولید می‌کند.

- مقدار هر یک از p_n ها از حاصل ضرب احتمال وقوع لاتاری L_K در احتمال p_n^k ، اینکه دستاورد n درلاتاری L_K بدست بیاید و با برهم افزودن بر روی بدست می آید. یعنی احتمال حادثه در یک لاتاری خلاصه شده و عبارت است از:

$$p_1 = \alpha_1 p_1^1 + ... + \alpha_k p_1^k$$

- نمودار (٦-B-٢): دو لاتاري مركب با يک بخت آزمايي تحويل يافته يكسان





نظریه مطلوبیت انتظاری

- تعریف ۳-B-۶: رابطه ترجیحات $\succsim$ بر فضای لاتاری‌های ساده $\mathscr{L}$ پیوسته است، اگر براي هر $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ مجموعه هاي
$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1]$ و
$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \preceq L''\} \subset [0,1]$ بسته باشند.

- به بیان توصيفي؛ پیوستگی ترجیحات به این معنی است که تغییرات کوچک در احتمال‌ها، ماهیت رتبه‌بندی میان دو لاتاری را تغییر نمی‌دهد.

- برای مثال، اگر یک سفر زیبا و بدون حادثه به وسیله اتومبیل به ماندن در خانه ترجیح داشته باشد، آنگاه باید یک ترکیب از حادثه "سفر زیبا و بدون حادثه با اتومبیل با یک احتمال بسیار کوچک ولی مثبت" مرگ درحادثه اتومبیل" هنوز بر ماندن در خانه ترجیح داشته باشد.

- بنابراین پیوستگی مورد ترجیحات رتبه بندي الفبايي تصمیم گیرنده را کنار می‌گذارد .

- ترجیحات الفبایی اصل موضوع پیوستگی را نقض میکند.
- مثال: ترجیح" اول سلامتی"

$$C = \{An\ Ice - cream; A\ million\ dollars;\ Terrible\ Accident\}.$$

قرار می‌دهیم:

$$L'' = (1,0,0), L = (0,1,0), L' = (0,0,1).$$

سپس انتخاب می‌کنیم:

$$\{\alpha_i\} \to \alpha = 1, 0 < \alpha_i < 1.$$

طبق ترجیحات " اول سلامتی" داریم:

$$L'' \succ \alpha_i L + (1-\alpha_i)L' = (0, \alpha_i, 1-\alpha_i).$$

$$\alpha_i L + (1-\alpha_i)L' \to L$$

اما داریم:

$$L \succ L''.$$

- تعریف ٤-B-٦: رابطه ترجیحات $\succsim$ تعریف شده بر فضای بخت‌آزمایی ساده $\mathscr{L}$، اصل استقلال را برقرار می‌سازد، اگر برای تمام $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ و $\alpha \in (0,1)$ داشته باشیم، $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$ اگر و تنها و اگر $L \succsim L'$.

- به عبارت‌های دیگر اگر هر یک از دو لاتاری با یک لاتاری سوم ترکیب گردد، آنگاه رتبه‌بندی ترجیحات دو ترکیب بدست آمده بستگی به لاتاری سوم مطرح شده ندارد. (مستقل است).

نمودار 3-B-6: اصل استقلال

- مثال ٦–B–١: نشان دهید که اگر ترجیحات $\succsim$ تعریف شده بر $\mathscr{L}$ اصل متعارف استقلال را برقرار سازد، آنگاه برای هر $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ و $\alpha \in (0,1)$ داریم:

$$L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L'$$

$$L \sim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

- برهان: فرض می‌کنیم که، رابطه ترجیحات برقرارکننده اصل کمال است.

$$L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

$$\textit{if } \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L'' \Leftrightarrow L \succ L'$$

-

$$\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L'' \Leftrightarrow L \succsim L'$$

$$\textit{if } L \sim L' \Rightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

- $$L \sim L' \Leftrightarrow L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

  $$L \sim L' \Leftrightarrow L' \succsim L \Leftrightarrow \alpha L' + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L''$$

  $$\Leftrightarrow \alpha L' + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

- $$L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

  $$L'' \succ L''' \Leftrightarrow \alpha L' + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L'''$$

  $$\Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L'''$$

- تعریف۵-B-۶: تابع مطلوبیت $U : \mathscr{L} \to \Re$ دارای یک فرم مطلوبیت انتظاری است اگر اعداد $(u_1, ..., u_N)$ متناظر با N دستاورد وجود داشته باشند، بطوریکه برای هر بخت آزمایی ساده $L = (p_1, ..., p_N) \in \mathscr{L}$ داشته باشیم:

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_1 p_1$$

- یک تابع مطلوبیت $U : \mathscr{L} \to \Re$ با فرم مطلوبیت انتظاری فون نیومن – مورگنشتاین نامیده می شود. توجه داریم که اگر L^n نشان دهنده یک بخت آزمایی باشد که n را با احتمال یک نتیجه بدهد، آنگاه $U(L^n) = u_n$ می گردد.

- عبارت $U(L) = \sum_{n=1}^{N} u_n p_n$ یک بیان و شکل عمومی برای تابع خطی در احتمال‌های $(p_1, ..., p_N)$ است. این خاصیت خطی بودن یک راه سودمندی برای تحلیل شکل تابع مطلوبیت انتظار را پیشنهاد می‌کند.

- گزاره (۱-B-٦): تابع مطلوبیت $U : \mathscr{L} \to \Re$ دارای یک فرم مطلوبیت انتظاری است، اگر و فقط اگر خطی باشد. یعنی ، اگر و تنها اگر خاصیت زیر را برقرار سازد.

$$U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

برای هر K بخت‌آزمایی $L_K \in \mathscr{L}$ و $k = 1, ..., K$ و احتمالهای $(\alpha_1, ..., \alpha_K) \geq 0$ و $\sum \alpha_K = 1$.

- برهان: فرض کنید که $U(.)$ خاصیت $U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$ را برقرار سازد، آنگاه باید نشان دهیم که $U(L) = \sum_n p_n u_n$ است.
فرض کنید که $U(.)$ خاصیت $U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$ را برقرار سازد، هر $L = (p_1, ..., p_N)$ را مي‌توانيم بصورت تركيب خطي از لاتاری‌هاي تباهيده $(L^1, ..., L^N)$ بنويسيم، يعني اينكه $L = \sum_n p_n L^n$. آنگاه با توجه به تباهيده بودن لاتاری ها داریم $U(L) = U(\sum_n p_n L^n) = \sum_n p_n U(L^n) = \sum_n p_n u_n$. بنابراين $U(.)$ فرم مطلوبيت انتظاري را دارد.

- برای اثبات طرف دیگر، فرض را به قرار مي‌دهیم که $U(.)$ داراي فرم تابع مطلوبیت انتظاري بوده و لاتاري مرکب $(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ را در نظر مي‌گیریم که در $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k)$ است. لاتاري تحویل یافته این تالاري مرکب عبارت است از $L' = U(\sum_k \alpha_k L_k)$. از اینرو،

$$U(\sum_k \alpha_k L_k) = \sum_n u_n (\sum_k \alpha_k p_n^k) = \sum_k \alpha_k U(L_k)$$

بنابراین، خاصیت $U(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U(L_k)$ برقرار است.

- گزاره (٦–B–٢): فرض کنید که $U : \mathscr{L} \to R$ يك تابع مطلوبيت انتظاري فون نيومن مورگنشتاين براي رابطه ترجيحات $\succsim$ که تعريف شده بر $\mathscr{L}$ باشد، آنگاه $\tilde{U} : \mathscr{L} \to R$ يك تابع‌هاي مطلوبيت فون نيومن مورد گشتاين ديگري است، اگر تنها اگر اسكالرهاي $\beta > 0$ و γ وجود داشته باشند، بطوريكه برای هر $L \in \mathscr{L}$ داشته باشيم
$$\tilde{U} = \beta U(L) + \gamma$$

- برهان: اثبات را با انتخاب دو لاتاري $\underline{L}$ و $\overline{L}$ با خاصيت $\underline{L} \precsim L \precsim \overline{L}$ براي تمام $L \in \mathscr{L}$ شروع مي‌كنيم . اگر $\underline{L} \sim \overline{L}$ باشد، آنگاه هر تابع مطلوبيت يك عدد ثابت بوده و نتيجه بلاواسطه برقرار مي‌شود. بنابراين، فرض را به اين قرار مي‌دهيم كه $\underline{L} \prec \overline{L}$ است.

- ابتدا توجه کنید که اگر $U(.)$ يك تابع مطلوبيت انتظاري فون نيومن مورگنشتاين بوده و $\widetilde{U} = \beta U(L) + \gamma$ باشد، آنگاه

$$\widetilde{U}(\sum_{k-1}^{K} \alpha_k L_k) = \beta U(\sum_{k-1}^{K} \alpha_k L_k) + \gamma$$

$$= \beta U[\sum_{k-1}^{K} \alpha_k U(L_k)] + \gamma = \sum_{k-1}^{K} \alpha_k [\beta U(L_k) + \gamma] = \sum_{k-1}^{K} \alpha_k \widetilde{U}(L_k).$$

- از آنجائيكه $\widetilde{U}(.)$ تعريف (٦–B–١) را برقرار مي‌سازد، آن داراي فرم مطلوبيت انتظاري است.

- براي جهت معکوس اين قضيه، مي‌خواهيم نشان بدهيم که اگر هر دو $\widetilde{U}(.)$ و $U(.)$ داراي فرم مطلوبيت انتظاري باشد، آنگاه ثابت‌هاي $\beta > 0$ و γ وجود دارند، بطوريکه $\widetilde{U} = \beta U(L) + \gamma$ براي تمام $L \in \varphi$ برقرار است.

- براي انجام آن، لاتاري $\varphi \in L$ را در نظر گرفته و $\lambda_L \in [o, 1]$ را تعريف مي‌کنيم، بطوريکه $U(L) = \lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L})$
بنابراين:

$$\lambda_L = U(L) - U(\underline{L}) / U(\overline{L}) - U(\underline{L})$$

- از آنجائیکه $U(\lambda_L\overline{L}+(1-\lambda_L)\underline{L})$ و $\lambda_L U(\overline{L})+(1-\lambda_L)U(\underline{L})=U(.)$ ترجیحات $\succsim$ را نشان مي‌دهد، باید $L\sim\lambda_L\overline{L}+(1-\lambda_L)\underline{L}$ باشد. اما اگر چنین باشد، آنگاه از آنجائیکه $\widetilde{U}(.)$ خطي بوده و همان ترجیحات یکسان را نشان مي‌دهد، داریم:

$$\widetilde{U}(L)=\widetilde{U}(\lambda_L\overline{L}+(1-\lambda_L)\underline{L})$$

$$=\lambda_L\widetilde{U}(\overline{L})+(1-\lambda_L)\widetilde{U}(\underline{L})$$

$$=\lambda_L(\widetilde{U}(\overline{L})-\widetilde{U}(\underline{L}))+\widetilde{U}(\underline{L})$$

- با جایگزاري بجاي λ_L از رابطه (٦-B-٢) و باز آرایي مولفه هاي آن، این نتیجه را مي‌دهد که $\widetilde{U}(L)=\beta U(L)+\gamma$ که در آن $\gamma=\widetilde{U}(\underline{L})-U(\underline{L})[\widetilde{U}(\overline{L})-\widetilde{U}(\underline{L}))/U(\overline{L})-U(\underline{L})]$ و $\beta=[\widetilde{U}(\overline{L})-\widetilde{U}(\underline{L}))/U(\overline{L})-U(\underline{L})]$ که اثبات کامل مي‌گردد.

- براي مثال، اگر چهار پیامد وجود داشته باشد، گزاره«تفاضل در مطلوبیت بین پیامدهاي ۱ و ۲ بزرگتر از تفاضل بین پیامدهاي ۳ و ٤ »، $u_1 - u_2 > u_3 - u_4$ ، به این معني است که

$$0.5u_1 + 0.5u_4 > 0.5u_3 + 0.5u_2$$

- بنابراین، این گزاره به این معني است که لاتاري $L = (0.5, 0, 0, 0.5)$ به لاتاري $L = (0, 0.5, 0.5, 0)$ ترجیح دارد. این رتبه‌بندي از تفاضل مطلوبیت تحت تمام تبدیلهاي خطي از توابع مطلوبیت انتظاري فون نیومن مورگنشتاین محفوظ مي‌ماند.

- مثال (٦–B–٢): در لاتاري $L_1 = (0.5, c_1^1, c_1^2)$ و $L_2 = (0.4, , c_1^2, c_2^2)$ که در آن $u(c_2^2) = 49$ ، $u(c_1^2) = 36$ ، $u(c_2^1) = 64$ و $u(c_1^1) = 25$ هستند.

$$U(L_1) = 0.5u(c_1^1) + 0.5u(c_2^1) = 44.5$$

$$U(L_1) = 0.4u(c_1^2) + 0.6u(c_2^2) = 43.8$$

- ملاحظه مي‌شود که لاتاري L_1 بر L_2 ترجيح دارد. اکنون تبديل يکنواي افزايشي $v = (u)^{0.5}$ از تابع مطلوبيت را در نظر بگيريد. تابع مطلوبيت فون نيومن و مورگنشتاين براي تابع مطلوبيت V براي L_1 و L_2 عبارت است از:

$$V(L_1) = 0.5u(c_1^1)^{0.5} + 0.5u(c_2^1)^{0.5} = 6.5$$

$$V(L_2) = 0.4u(c_1^2)^{0.5} + 0.6u(c_2^2)^{0.5} = 6.6$$

- يعني بر اساس تابع مطلوبيت V، لاتاري L_1 بر L_2 ترجيح دارد، يعني اينکه رتبه‌بندي بر اساس تابع مطلوبيت انتظاري نسبت به تبديلهاي غيرخطي پايا نيست.

- مثال (٦-B-٣): در شرایطی که اصول فون نیومن—مورگنشتاین برقرار است، مصرف کننده ای با چهار موقعیت (لاتاری) A و B و C و D روبرو است. اگر لاتاری های او به صورت زیر باشد، $C=(0.2,B,D)$ ، $B=(0.4,A,D)$ و نیز $A\succ B\succ C\succ D$ مقادیر عددی مطلوببت چهار موقعییت فوق را پیدا کنید.
- می‌توانیم لاتاری‌های A و D را دو لاتاری تباهیده با مطلوبیت انتظاری به ترتیب برابر با $U(A)=200$ و $U(D)=100$ فرض کنیم. مطلوبیت حاصل از لاتاری تباهیده $C=(0.2,B,D)$ و $B=(0.4,A,D)$ است.
- در نتیجه برای $B=(0.4,A,D)$ میتوانیم به نویسیم که

$$U(B)=0.4U(A)+0.6U(D)=0.4(200)+0.6(100)=140$$

- همین طور برای $C=(0.2,B,D)$ داریم:

$$U(C)=0.2U(B)+0.8U(D)=0.2(140)+0.8(100)=108$$

- در نتیجه

$$U(A)>U(B)>U(C)>U(D)\equiv A\succ B\succ C\succ D$$

- مثال (٦-B-٤): نشان دهيد كه اگر رابطه ترجيحات $\succeq$ بر $\mathscr{L}$ با يك تابع مطلوبيت $U(.)$ كه داراي فرم تابع مطلوبيت انتظاري است، نشان داده شود، آنگاه $\succeq$ اصل متعارف استقلال را برقرار مي‌سازد. قضيه مطلوبيت انتظاري، نتيجه اصلي اين بخش، به ما مي‌گويد كه عكس آن هم درست است.

$$L \succeq L' \Leftrightarrow U(L) \geq U(L') \Leftrightarrow$$

$$\sum p_n u_n \geq \sum p'_n u_n \Leftrightarrow \alpha \sum p_n u_n + (1-\alpha) \sum p''_n u_n \geq$$

$$\alpha \sum p'_n u_n + (1-\alpha) \sum p''_n u_n \Leftrightarrow \alpha U(L) + (1-\alpha) U(L'') \geq$$

$$\alpha U(L') + (1-\alpha) U(L'') \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha) L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha) L''$$

- مثال(٦-B-٥): نشان دهید که اگر مجموعه رخدادهای C متناهی بوده و ترجیحات عقلانی تعریف شده بر $\mathscr{L}$ اصل موضوع استقلال را برقرار سازد، آنگاه بهترین و بدترین بخت آزمایی $\overline{L}$ و $\underline{L}$ وجود دارند به طوریکه $\overline{L} \succeq L \succeq \underline{L}$، برای $L \in \mathscr{L}$ برقرار است.

- پاسخ: مجموعه بخت آزمایی‌های جهت اثبات ابتدا L'' را یک لاتاری تباهیده فرض می کنیم که در آن حادثه n با احتمال معین رخ داده است و $\overline{L} \succeq L''$

$$\forall n \in 1, ..., N \& \underline{L} \succeq L'' \rightarrow \overline{L} \succeq \sum_{n=1}^{N} p_n L_n \Rightarrow \overline{L} \succeq L$$

$$L_0, (L_1, L_2, ..., L_k; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$$

$$\sum_k \alpha_k = 1$$

$$L_i \in L \; i = 0, 1, 2, ..., K$$

$$\forall K = 1 L_0 \succeq L_i \Rightarrow L_0 \succeq L_i$$

$$\forall K = 1, 2, ..., K \, L_0 \succeq L_k \Rightarrow L_0 \succeq \sum_{k=1}^{k-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k} L_k$$

$$\forall K = 1, 2, ..., K \, L_0 \succeq L_k \Rightarrow L_0 \succeq \sum_{k=1}^{k} \alpha_k L_k$$

$$L_0 \succeq L_k \Rightarrow \alpha_k L_0 \succeq \alpha_k L_k$$

$$L_0 \succeq L_k \Rightarrow L_0 \succeq \sum_{k=1}^{k-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k} L_k \Rightarrow (1-\alpha_k) L_0 \succeq (1-\alpha_k) \sum_{k=1}^{k-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k} L_k$$

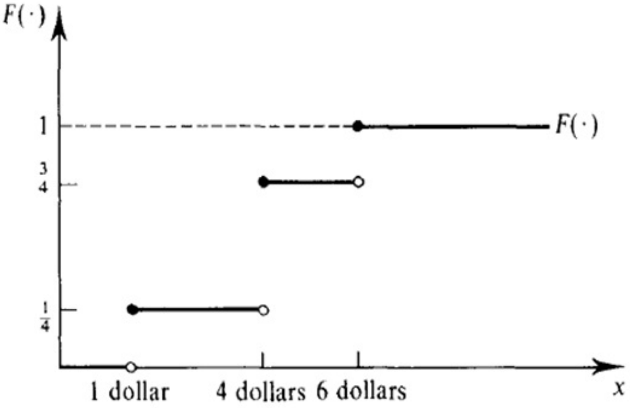
$$\Rightarrow \alpha_k L_0 + (1-\alpha_k) L_0 \succeq \alpha_k L_k + \sum_{k=1}^{k-1} \alpha_k L_k \Rightarrow L_0 \succeq \sum_{k=1}^{k} \alpha_k L_k$$

اثبات $\overline{L} \prec L^n$ مشابه قسمت قبل.

بخت آزماییهای پولی و ریسک گریزی

- فرض کنید که مقادیر پول را به وسیله متغیر پیوسته X نشان بدهیم، می‌توانیم لاتاری پولی را به وسیله یک تابع توزیع انباشته $F : R \to [0,1]$ نشان دهیم. یعنی اینکه، برای هر x تابع $F(x)$ عبارت است از توزیع احتمال مقادیر دستاوردهای تحقق یافته کمتر یا برابر با X است. توجه داریم که اگر تابع توزیع بخت‌آزمایی دارای تابع چگالي توزیع $f(x)$ مربوط به آن باشد، آنگاه $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ برای تمام X ها است.

بخت آزماییهای پولی و ریسک گریزی



$$\left\{\begin{array}{l} \text{Prob}(1 \text{ dollar}) = \frac{1}{4} \\ \text{Prob}(4 \text{ dollars}) = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}(6 \text{ dollars}) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{if } x \in [1, 4) \\ \frac{3}{4} & \text{if } x \in [4, 6) \\ 1 & \text{if } x \geq 6 \end{cases}$$

- همانند بخش $6-B$، بحث را با تصمیم‌گیرنده‌های شروع می‌کنیم که دارای ترجیحات عقلاني f_0 تعریف شده بر $\mathscr{L}$ باشد. کاربرد قضیه مطلوبیت انتظاری برای رخدادهاي تعریف شده به وسیله یک متغیر پیوسته به ما می‌گوید که تحت فرض‌های این قضیه، مقادیر مطلوبیت $u(x)$ نسبت داده شده به مقادیر غیرمنفی پول وجود دارد، با این خاصیت که برای هر $F(.)$ می‌تواند به وسیله تابع مطلوبیت $U(.)$ به شکل زیر ارزشیابی گردد:

$$U(F)=\int u(x)dF(x)$$

- عبارت فوق بیان دقیقی از شکل مطلوبیت انتظاری برای ترتیبات ما است. تابع مطلوبیت ون نیومن و مورگنشتاین $V.N-M$ ، همان امید ریاضی تعریف شده و بر مقادیر تحقق‌یافته x، مقادیر تابع $u(x)$ است.
- لازم است، بین تابع مطلوبیت $U(.)$ تعریف شده بر بخت‌آزمایی‌ها و تابع مطلوبیت $u(.)$ تعریف شده بر مقدار حتمی پول تمایز قائل شویم. به‌همین دلیل، تابع $U(.)$ را تابع مطلوبیت انتظاری فون نیوتن و $u(.)$ را تابع مطلوبست برنولی می‌نامیم.

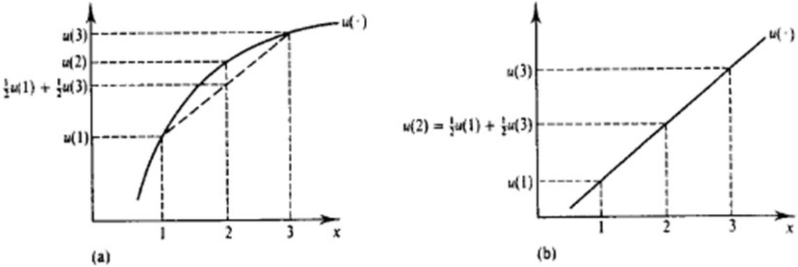
- تعریف (۱–C–٦): یک تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز است، اگر برای هر بخت‌آزمایی $F(.)$، لاتاری تباهیده که مقدار $\int xdF(x)$ را با اطمینان نتیجه می‌دهد، حداقل به خوبی خودلاتاری $F(.)$ باشد. اگر تصمیم‌گیرنده همیشه (برای هر $F(.)$) نسبت به این دو لاتاری بی‌تفاوت باشد، می‌گوییم که وی ریسک خنثی است. سرانجام می‌گوییم که تصمیم‌گیرنده به‌طوراکید ریسک گریز است، اگر بی‌تفاوتی برقرار باشد تنها زمانی که دو بخت‌آزمایی یکسانی باشد.
- اگر الگوي ترجيحات یک بازنمايي مطلوبيت انتظاری را با تابع مطلوبیت برنولی $u(.)$ را نتیجه بدهد، بطور مستقیم از تعریف ریسک گریزی، نتیجه می‌شود که تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز است اگر و فقط اگر:

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int xdF(x)\right)$$

- نامساوی فوق به نامساوی ینسن معروف است و آن خاصیت، تعریفی از یک تابع مقعر است.

بخت آزماییهای پولی و ریسک گریزی

- نمودار (۶-C-۲): ریسک گریزی (تابع مطلوبیت برنولی مقعر) و ریسک خنثایی (تابع مطلوبیت برنولی خطی)



- تعریف (۲- C -۶): در تابع مطلوبیت برنولی $u(.)$ مفاهیم زیر را تعریف می‌کنیم:
- معادل مطمئن $F(.)$، نشان‌داده شده به وسیله $c(F,u)$، مقداری از پول است که برای آن فرد بین قمار $F(.)$ و مقدار حتمی $c(F,u)$ بی‌تفاوت است، یعنی اینکه:

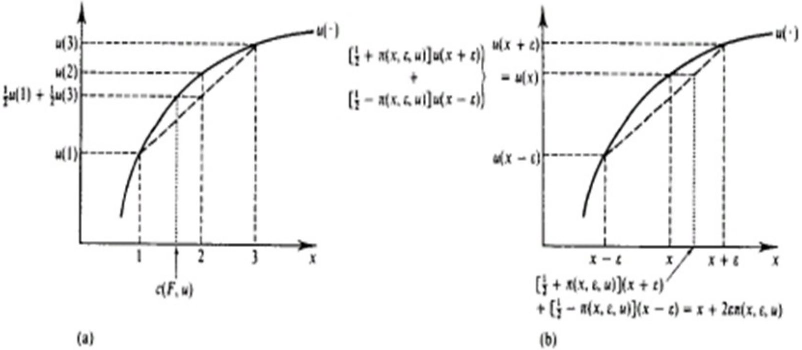
$$u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$$

- برای هر مقدار ثابتی از پول x و مقدار ثابت ϵ، حاشیه احتمال نشان داده شده به وسیله $\pi(x,\epsilon,u)$، مقدار احتمال اضافي در برد نسبت به احتمالهای یك بازي منصفانه است که فرد مشارکت کننده را بین رخداد یقیني x و یك قمار بین دو رخداد $x+e$ و $x-e$ بي‌تفاوت مي‌سازد، یعني اینکه

$$u(x) = (\frac{1}{2} + \pi(x,\epsilon,u))u(x+e) + (\frac{1}{2} - \pi(x,\epsilon,u))u(x-e)$$

بخت آزماییهای پولی و ریسک گریزی

نمودار(٦-C-٣): معادل مطمئن و و حاشیه احتمال برای یک یک تابع مطلوبیت برنولی مقعر



- گزاره (٦-C-١): فرض کنید که تصمیم گیرنده یك فرد حداکثر سازنده مطلوبیت انتظاري با یك تابع مطلوبیت برنولي $u(.)$ تعریف شده بر مبالغ پول باشد. آنگاه خواص زیر همارز هستند:
  - تصمیم‌گیرنده ریسك گریز است.
  - تابع $u(.)$ مقعر است
  - $c(F,u) \leq \int xdF(x)$ براي تمام $F(.)$
  - $\pi(x,e,u) > 0$ براي تمام x ها

- مثال(۶-C-۳): تقاضا برای پوشش بیمه‌ای: یک تصمیم‌گیرنده اکیداً ریسک‌گریز را در نظر بگیرید که دارای ثروت اولیه w است و با خطر از دست دادن D دلار از ثروت مواجه است. احتمال وقوع این زیان برابر π است. با این حال برای تصمیم‌گیرنده امکان خرید بیمه وجود دارد. هزینه یک واحد بیمه q دلار است و در صورت وقوع خسارت یک دلار مي‌پردازد.
- بنابراین اگر α تعداد واحدهای بیمه خریداری شده باشد و اگر خسارتی به فرد وارد نشود ثروت از بعد از خرید بیمه، برابر با $w - \alpha q$ است، و برابر با $w - \alpha q - D + \alpha$ است اگر حادثه وقوع نمایند. توجه داریم، برای اهداف اشاره شده در قبل، که ثروت انتظاري که ثروت انتظاری تصمیم‌گیرنده برابر است با $w - \pi D + \alpha\pi - \alpha q$، زیرا؛

$$(1-\pi)(w-\alpha q)+\pi(w-D+\alpha-\alpha q)=w-\pi D+\alpha\pi-\alpha q$$

- اکنون مسئله تصمیم‌گیرنده α (تعداد واحدهاي بيمه مورد نياز) است، بنابراين:

$$Max\ (1-\pi)u(w-\alpha q)+\pi u(w-\alpha q-D+\alpha)$$

- اگر α^* یک سطح بهین باشد، باید شرط مرتبه اول زیر را برقرار سازد؛

$$-q(1-\pi)u'(w-\alpha q)+\pi(1-q)u'(w-\alpha q-D+\alpha)\leq 0$$

- با شرط برابری اگر $\alpha^*>0$ باشد.
- اکنون فرض کنید q قیمت یک واحد بیمه بطور آکچواری منصفانه باشد ، یعنی برابر با هزینه انتظاری بیمه. یعنی $q=\pi$. یعنی رقابت در صنعت بیمه سبب مي‌گردد که سود آن صفر بشود.

- اگر $\alpha^* = 0$ باشد، آنگاه $u'(w - D) < u'(w)$ می گردد که با توجه به نزولی بودن مطلوبیت نهایی نسبت به ثروت یک فرد ریسک گریز غیرممکن است. از اینرو $\alpha^* > 0$ باید باشد. آنگاه داریم:

$$u'(w - D + \alpha^*(1 - \pi)) - u'(w - \alpha^*\pi) \leq 0$$

- از آنجائیکه $u'(w - D) > u'(w)$ است، باید داشته باشیم $u'(w - D + \alpha^*(1 - \pi)) = u'(w - \alpha^*\pi)$ و بنابراین:

$$u'(w - D + \alpha^*(1 - \pi)) = u'(w - \alpha^*\pi)$$

- از آنجایکه $u'(.)$ اکیدا نزولی است، نتیجه می‌شود که؛

$$w - D + \alpha^*(1 - \pi) = w - \alpha^*\pi$$

- یا بطوری هم ارز با $\alpha^* = D$ است. بنابراین اگر بیمه بطور آکچواری منصفانه باشد. يعني قیمت هر واحد بیمه به اندازه احتمال و قوع حادثه باشد، آنگاه فرد تصمیم‌گیر بطور کامل، خطر را بیمه خواهد کرد و ثروت وی صرف نظر از وقوع حادثه زیان برابر با $w - \pi D$ می‌گردد.

- مثال(٦-C-٤): نشان دهید که اگرقیمت هر واحد از بیمه بطور آکچواری منصفانه نباشد،)یعنی $\pi > q$، آنگاه افراد دارایی در معرض خطر خود را بطورکامل بیمه نمی‌کنند.

$$Max\ \pi u(w-D-\alpha q+\alpha)+(1-\pi)u(w-\alpha q)$$

$$F.O.C:\pi(1-q)u'(w-D-\alpha q+\alpha)-(1-\pi)qu'(w-\alpha q)=0$$

$$\Rightarrow \pi(1-q)u'(w-D-\alpha q+\alpha)=(1-\pi)qu'(w-\alpha q)$$

$$q\geq\pi\Rightarrow(1-\pi)\geq 1-q\Rightarrow q(1-\pi)\geq\pi(1-q)$$

$$\Rightarrow u'(w-D-\alpha q+\alpha)\geq u'(w-\alpha q)$$

$$\Rightarrow w-D-\alpha q+\alpha\leq w-\alpha q\Rightarrow\alpha\leq D$$

- مثال(٦-C-٦): اثبات کنید که چهار شرط گزاره (٦-C-١) هم ارز هستند.

$1 \Rightarrow 4$

$$E(x) = \int xdF(x) = 0.5(x-\epsilon) + 0.5(x+\epsilon) = x$$

فرض می‌کنیم توزیع $F_\epsilon(.)$ احتمال $1/2 - \pi(x,\epsilon,u)$ را به $(x-\epsilon)$ و احتمال $1/2 + \pi(x,\epsilon,u)$ را به $(x+\epsilon)$ نسبت می‌دهد:

$$u(E(x)) = \int u(x)F_\epsilon(x)$$

$$u(x-\epsilon)(0.5-\pi(x,\epsilon,u))+u(x+\epsilon)(0.5+\pi(x,\epsilon,u))$$

$$=0.5u(x-\epsilon)+0.5u(x+\epsilon)+\pi(x,\epsilon,u)(u(x+\epsilon)-u(x-\epsilon))$$

$$E(u(x))=0.5(x-\epsilon)+0.5(x+\epsilon)$$

$$E(u(x))\leq u(E(x)\Rightarrow E(u(x))-u(E(x)\leq 0$$

$$\Rightarrow -\pi(x,\epsilon,u)(u(x+\epsilon)-u(x-\epsilon))\leq 0\Rightarrow \pi(x,\epsilon,u)\geq 0$$

$4 \Rightarrow 1$

$$if\ y, z \in ...; y \geq z, x = (y+z)/2, \epsilon = (y-z)/2$$

$$\Rightarrow y = x + \epsilon, z = x - \epsilon$$

$$u(x) = u(x-\epsilon)(0.5 - \pi(.)) + u(x+\epsilon)(0.5 + \pi(.))$$

$$= 0.5u(z) + 0.5u(y) + \pi(x, \epsilon, u)(u(y) - u(z))$$

$$\Rightarrow 0.5u(z) + 0.5u(y) \leq u(x) = u(0.5y + 0.5x)$$

$b.$

$$u(\lambda \sum \alpha_n z_n + (1-\lambda) \sum \alpha_n^{'} z_n) \geq \lambda u(\sum \alpha_n z_n) + (1-\lambda) u(\sum \alpha_n^{'} z_n)$$

$$\Rightarrow \int u(\lambda \sum \alpha_n z_n + (1-\lambda) \sum \alpha_n^{'} z_n) dF(z_1, z_2, ..., z_n) \geq$$

$$\int (\lambda u(\sum \alpha_n z_n) + (1-\lambda) u(\sum \alpha_n^{'} z_n)) dF(z_1, z_2, ..., z_n)$$

$$\Rightarrow U(\lambda \alpha + (1-\lambda)\alpha^{'}) \geq \lambda \int u(\sum \alpha_n z_n) dF(z_1, z_2, ..., z_n) +$$

$$(1-\lambda) \int u(\sum \alpha_n^{'} z_n) dF(z_1, z_2, ..., z_n)$$

$$\Rightarrow U(\lambda \alpha + (1-\lambda)\alpha^{'}) \geq \lambda U(\alpha) + (1-\lambda) U(\alpha^{'})$$

$2 \Rightarrow 3$

$$\int u(x)dF(x) \leq u(\int xdF(x)), u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$$

$$\Rightarrow u(c(F,u)) \leq u(\int xdF(x)) \Rightarrow c(F,u) \leq \int xdF(x)$$

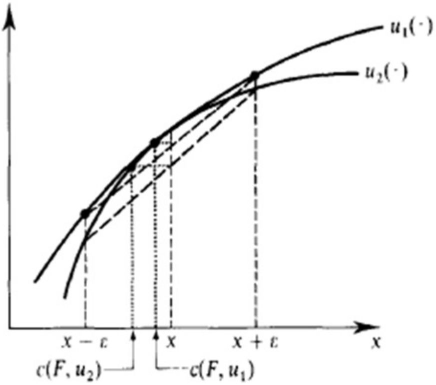
$3 \Rightarrow 2$

$$c(F,u) \leq \int xdF(x) \Rightarrow u(c(F,u)) \leq u(\int xdF(x))$$

$$\int u(x)dF(x) \leq u(\int xdF(x))$$

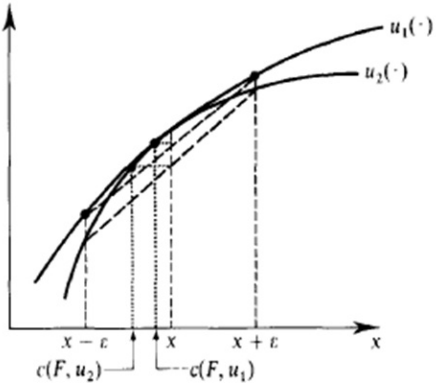
اندازه‌گیری و مقایسه شدت ریسک‌گریزی بین افراد

- نمودار (٦–C–٤): تفاوت در درجه ریسک گریزی دو فرد.
- تابع مطلوبیت برنولی فرد دو دارای تقعر بیشتری نسبت به تابع مطلوبیت برنولی فرد یک بوده، از اینرو معادل مطمئن فرد یک بیشتر از فرد دو است.



- تعریف (۳–C–٦): با فرض مشتق‌پذیری از مرتبه دوم تابع مطلوبیت برنولی $U(.)$ نسبت به پول، ضریب آرو– پرت ریسک‌گریزی مطلق x به‌صورت $r_A(x) - u''(x)/u'(x)$ تعریف می‌گردد.
- معیار آرو پرت می‌تواند به صورت زیر توجیه گردد. می‌دانیم که ریسک خنثایی هم‌ارز با خطی بودن $U(.)$ است. یعنی اینکه $u''(.) = 0$ برای تمام x ها.
- بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که درجه ریسک‌گریزی مرتبط با تقعر باشد.

- نمودار(٦-C-٥): ترجیحات یک فرد ریسک پذیر



- مثال ٦-C-٢: تابع مطلوبیست $u(x) = -exp(-ax)$ برای $a > 0$ را در نظر گرفته بگیریم. آنگاه $u'(x) = -a.exp(-ax)$ و $u"(x) = -a^2.exp(-ax)$ ، بنابراین برای تمام xها داریم، $r_A(x,u) = a$ ، از این مشاهده، این نتیجه بدست می‌آید که شکل عمومی تابع مطلوبیت برنولی با یک معیاری از ریسک‌گریزی مطلق آرو– پرت، برابر $a > 0$ در تمام x ها است و عبارت است از $u(x) = -exp(-ax) + b$ برای بعضی از مقادیر $a, b > 0$
- با داشتن معیاری از ریسک‌گریزی می‌توانیم از آن در مسایل ایستای مقایسه‌ای استفاده کنیم. دو وضعیت مرسوم، مقایسه نگرش ریسک بین افراد با توابع مطلوبیت مختلف، مقایسه نگرش به ریسک برای یک فرد خاص در سطوح مختلف ثروت است.

- گزاره (۲-C-۶): تعاریف زیر درباره ریسک‌گریزی فرد ۲ نسبت به فرد۱ هم‌ارز هستند.
- $r_A(x, u_1) \leq r_A(x, u_2)$ براي هر x
- تابع اكيدا افزايشي مقعر $\psi(.)$ وجود دارد بطوريكه در تمام مقادير x داريم، $u_2(x) = \psi(u_1(x))$. يعني اينكه $u_2(x)$ يك تبديل مقعر از $u_1(x)$ است. [به عبارت ديگر تابع $u_2(x)$ مقعر تر از $u_1(x)$ است.]
- $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$
- براي تمام x ها و ε ها $\pi(x, \varepsilon, u_2) \geq \pi(x, \varepsilon, u_1)$.

بخت آزماییهای پولی و ریسک گریزی

مثال(٦–C–٧): در گزاره قبل ثابت کنید که شرط ٣ شرط ٤ را ایجاب می‌کند، و شرط ٤ نیز شرط ١ را ایجاب می‌کند.

$$F(z)=\begin{cases} z<x-\epsilon & 0 \\ x-\epsilon\leq z\leq x+\epsilon & 0.5-\pi \\ x+\epsilon<z & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c(F,u_2)\leq c(F,u_1)\Rightarrow x\leq c(F,u_1)$$

$$u_1(c(F,u_1))=(1/2-\pi(x,\epsilon,u_2))u_1(x-\epsilon)+(1/2+\pi(x,\epsilon,u_2))u_1(x+\epsilon)=$$

$$0.5u_1(x-\epsilon)+0.5u_1(x+\epsilon)+\pi(x,\epsilon,u_2)(u_1(x+\epsilon)-u_1(x-\epsilon))$$

$$u_1(x)=(1/2-\pi(x,\epsilon,u_2))u_1(x-\epsilon)+(1/2+\pi(x,\epsilon,u_2))u_1(x+\epsilon)=$$

$$0.5u_1(x-\epsilon)+0.5u_1(x+\epsilon)+\pi(x,\epsilon,u_1)(u_1(x+\epsilon)-u_1(x-\epsilon))$$

$$\Rightarrow 0.5u_1(x+\epsilon) + 0.5u_1(x+\epsilon) + \pi(x,\epsilon,u_2)(u_1(x+\epsilon) - u_1(x-\epsilon)) \geq$$

$$0.5u_1(x-\epsilon) + 0.5u_1(x+\epsilon) + \pi(x,\epsilon,u_1)(u_1(x+\epsilon) - u_1(x-\epsilon))$$

$$\Rightarrow \pi(x,\epsilon,u_2) \geq \pi(x,\epsilon,u_1)$$

$$\pi(x,\epsilon,u_2) \geq \pi(x,\epsilon,u_1)$$

$$\Rightarrow r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$$

$$\textit{if } \varepsilon = 0 \Rightarrow \pi(x, 0, u_2) = \pi(x, 0, u_1) = 0$$

$$\textit{if } \varepsilon \uparrow \Rightarrow \partial\pi(x, \epsilon, u_2)/\partial\varepsilon \geq \partial\pi(x, \epsilon, u_1)/\partial\varepsilon$$

$$\Rightarrow \pi'(x, \epsilon, u_2) \geq \pi'(x, \epsilon, u_1)$$

$$\Rightarrow \epsilon\pi'(x, \epsilon, u_2) \geq \epsilon\pi'(x, \epsilon, u_1)$$

$$\Rightarrow r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1)$$

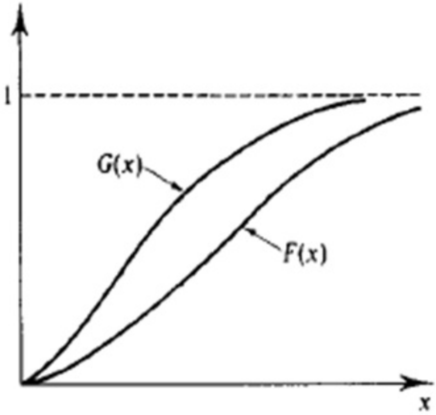
مقایسه توزیع دستاوردهای برحسب بازدهی و ریسک

- توزیع $F(.)$ داراي تسلط تصادفي مرتبه اول بر $G(.)$ است اگر براي هر تابع ناكاهشي $F : R \to R$ داشته باشيم.

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

- گزاره (۶-D-۱): توزیع دستاوردهاي پولي $F(.)$ داراي تسلط تصادفي مرتبه اول بر توزیع $G(.)$ است، اگر و تنها اگر $F(x) \leq G(x)$ براي هر باشد.

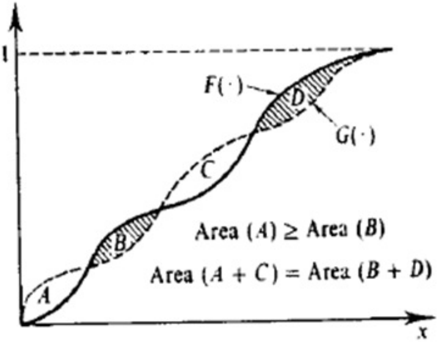
- نمودار(۶-D-۱): تابع توزیع $F(.)$ دارای تسلط تصادفی مرتبه اول بر بخت آمایی $G(.)$ است



- تعريف (٦-D-٢): براي هر دو توزيع $F(.)$ بر $G(.)$ با ميانگين يكسان، توزيع تسلط تصادفي مرتبه دوم و يا داراي ريسك كمتري بر $G(.)$ دارد، اگر براي هر تابع مقعر ناكاهشي $u : R+ \Rightarrow R$ داشته باشيم:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

- نمودار(٦-D-٢): نمایش تسلط تصادفی مرتبه دوم، مقایسه ریسک و بازدهی



مطلوبیت وابسته به موقعیت