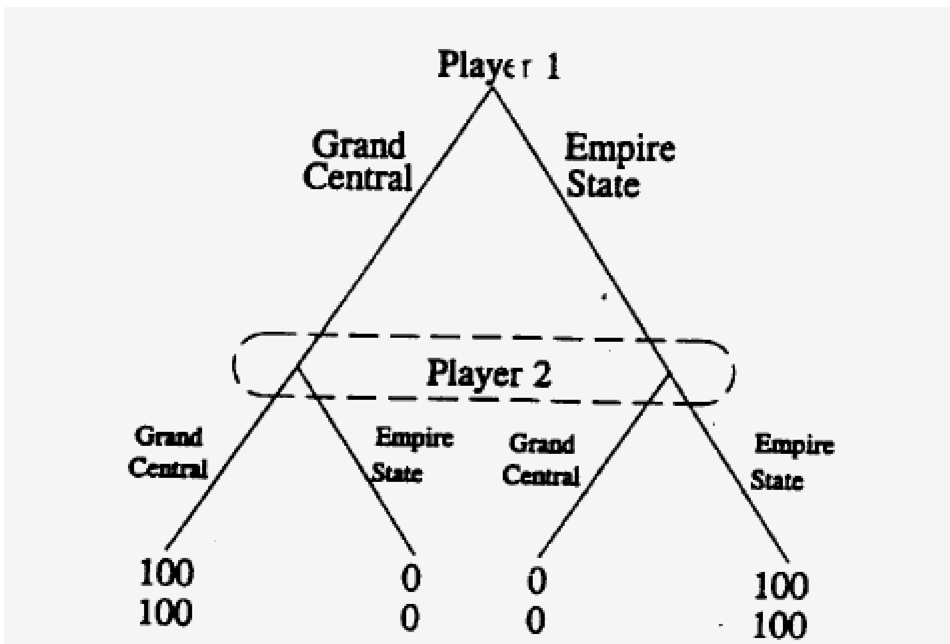
به نام خدا

پاسخ تمرین سری دوم (فصل هفت)

7.C.1 دو فرد تصمیم می‌گیرند یکدیگر را در نیویورک ملاقات کنند اما فراموش می‌کنند مکان دقیق را مشخص کنند. هردو باید همزمان تصمیم بگیرند که برای ناهار در کدام محل حضور یابند همچنین امکان صحبت کردن با یکدیگر را ندارند اگر یکدیگر را ملاقات کنند از بودن با یکدیگر لذت برده و منفعتی معادل ۱۰۰ دلار نصیب آن‌ها می‌شود اما اگر در جاهای مختلف حاضر شوند و یکدیگر را ملاقات نکنند منفعتی معادل صفر دلار نصیبشان می‌شود. فرم گسترده این بازی را به صورت زیر رسم می‌کنیم. دقت کنید که بازی همزمان است و حتما باید همزمان بودن بازی را با کشیدن یک بیزی دور مجموعه اطلاعات فرد نشان دهیم وگرنه فرم گسترده‌ای که رسم می‌شود برای این بازی نخواهد بود ومتعلق به بازی‌ای است که در آن افراد به‌صورت متوالی تصمیم می‌گیرند.



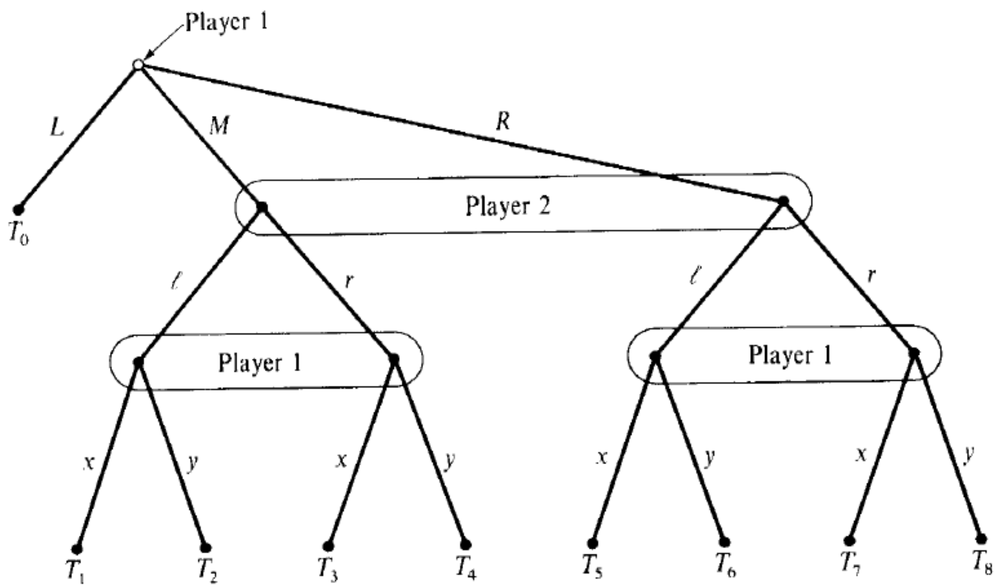
7.D.1 در یک بازی که بازیکن دارای n مجموعه اطلاعات است برای به‌دست آوردن تعداد استراتژی‌های ممکن برای هر فرد باید تعداد انتخاب‌هایی که فرد در هر مجموعه اطلاعات دارد را در هم ضرب کرد بنابراین تعداد استراتژی‌های ممکن برای فرد در این بازی برابر است با:

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots . \times M_N$$

7.D.2 در بازی جفت‌کردن سکه‌ها هردو فرد همزمان سکه‌های خود را نشان می‌دهند. هر فرد دو انتخاب دارد که شیر یا خط نشان دهد (H,T) . اگر هردو شیر یا هردو خط نشان دهند فرد ۱ باید یک دلار به فرد۲ بدهد و اگر مخالف هم نشان دهند فرد ۲ باید یک دلار به فرد ۱ بدهد. فرم نرمال این بازی به صورت زیر است:

		Player2	
		H	T
Player1	H	-1,1	1,-1
	T	1,-1	-1,1

7.E.1 شکل زیر فرم گسترده بازی برای دو بازیکن را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل استراتژی‌های ممکن برای هر بازیکن به‌صورت زیر هستند:



a. برای نوشتن استراتژی‌های افراد باید توجه کنیم که فرد چند مجموعه اطلاعات دارد یا به عبارتی چندجا تصمیم می‌گیرد در این سوال فرد دو تنها یک بار تصمیم می‌گیرد و یک مجموعه اطلاعات دارد پس استراتژی‌های او تنها $\{\{l\},\{r\}\}$ است اما بازیکن ۱ در سه جا تصمیم می‌گیرد پس استراتژی پروفایل او مجموعه‌های سه تایی هستند که باید تمامی ترکیب‌های ممکن را بنویسیم و به صورت زیر خواهند بود:

$$\left\{\begin{matrix} \{L,x,x\},\{L,x,y\},\{L,y,x\},\{L,y,y\},\{M,x,x\},\{M,x,y\},\{M,y,x\},\{M,y,y\} \\ ,\{R,x,x\},\{R,x,y\},\{R,y,x\},\{R,y,y\} \end{matrix}\right\}$$

b. در این قسمت باید نشان دهیم که برای هر behavior strategy که بازیکن ۱ بازی می‌کند یک میکس استراتژی وجود دارد که معادل آن است.

نکته: در میکس استراتژی به هر استراتژی یک احتمال اختصاص داده می‌شود ولی در استراتژی رفتاری به هر action یک احتمال نسبت می‌دهیم.

برای حل باید توجه کنیم که هنگامی دو استراتژی معادل هستند که احتمال به‌دست آوردن گره‌های پایانی در هردو استراتژی باهم برابر باشد بنابراین باید این احتمالات را در هردو استراتژی محاسبه کنیم.

فرض کنیم بازیکن اول یک استراتژی رفتاری دارد که در مجموعه اطلاعات اول L, M, R را به‌ترتیب با احتمالات p_1, p_2, p_3 و در مجموعه اطلاعات دوم x, y را به‌ترتیب با احتمالات q_1, q_2 و در مجموعه اطلاعات سوم x, y را به ترتیب با احتمالات s_1, s_2 بازی می‌کند. همچنین بازیکن دوم میکس استراتژی بازی می‌کند و l, r را به احتمالات $\sigma(l), \sigma(r)$ بازی می‌کند که مجموع این دو احتمال برابر یک است. حال باتوجه به استراتژی‌های دو فرد احتمال به‌دست آوردن هرکدام از این گره‌های پایانی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$pr(T_0) = p_1, \qquad pr(T_1) = p_2\sigma(l)q_1, \qquad pr(T_2) = p_2\sigma(l)q_2$$

$$pr(T_3) = p_2\sigma(r)q_1\,, \qquad pr(T_4) = p_2\sigma(r)q_2, \qquad pr(T_5) = p_3\sigma(l)s_1$$

$$pr(T_6) = p_3\sigma(l)s_2, \qquad pr(T_7) = p_3\sigma(r)s_1, \qquad pr(T_8) = p_3\sigma(r)s_2$$

حال یک استراتژی میکس برای بازیکن اول معرفی می‌کنیم که هم‌ارز استراتژی رفتاری بالاست. به اینصورت که $\{L, x, x\}$ را با احتمال p_1 و $\{M, x, x\}$ با احتمال p_2q_1، $\{M, y, x\}$ با احتمال p_2q_2، $\{R, x, x\}$ با احتمال p_3s_1، $\{R, x, y\}$ با احتمال p_3s_2 بازی می‌کند. جمع این احتمالات نیز باید برابر یک باشد:

$$p_1 + p_2q_1 + p_2q_2 + p_3s_1 + p_3s_2 = p_1 + p_2(q_1 + q_2) + p_3(s_1 + s_2) = 1$$

حال با توجه به این میکس استراتژی باید احتمال به‌دست آوردن هرکدام از گره‌های پایانی را به‌دست آوریم (به عهده خودتان) که می‌بینیم دقیقا برابر با احتمالات به‌دست آمده در حالت استراتژی رفتاری است بنابراین میکس استراتژی معرفی شده معادل استراتژی رفتاری یادشده است.

c. در این قسمت باید باید عکس قسمت قبل را نشان دهیم یعنی برای هر میکس استراتژی یک استراتژی رفتاری معادل آن وجود دارد.

مشابه قسمت قبل یک استراتژی میکس و سپس استراتژی رفتاری معادل آن را معرفی کنیم. فرض کنید بازیکن ۱ از میکس استراتژی زیر استفاده کند و بازیکن ۲ از میکس استراتژی σ استفاده کند.

$$\{L,x,x\} \to p_1 \quad ,\{L,x,y\} \to p_2 \quad ,\{L,y,x\} \to p_3 \quad ,\{L,y,y\} \to p_4 \quad ,\{M,x,x\} \to p_5$$
$$\{M,x,y\} \to p_6 \quad ,\{M,y,x\} \to p_7 \quad ,\{M,y,y\} \to p_8 \quad ,\{R,x,x\} \to p_9 \quad ,\{R,y,x\} \to p_{10}$$
$$\{R,x,y\} \to p_{11} \quad ,\{R,y,y\} \to p_{12}$$

باتوجه به استراتژی بازیکن اول و دوم احتمال به‌دست آوردن هرکدام از گره‌های پایانی به شکل زیر است (دقت شود در محاسبه احتمالات باید احتمالاتی که بازیکن دوم به استراتژی‌های خود می‌دهد نیز در نظر گرفته شود) :

$$pr(T_0) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \qquad pr(T_1) = (p_5 + p_6)\sigma(l), \qquad pr(T_2) = (p_7 + p_8)\sigma(l)$$

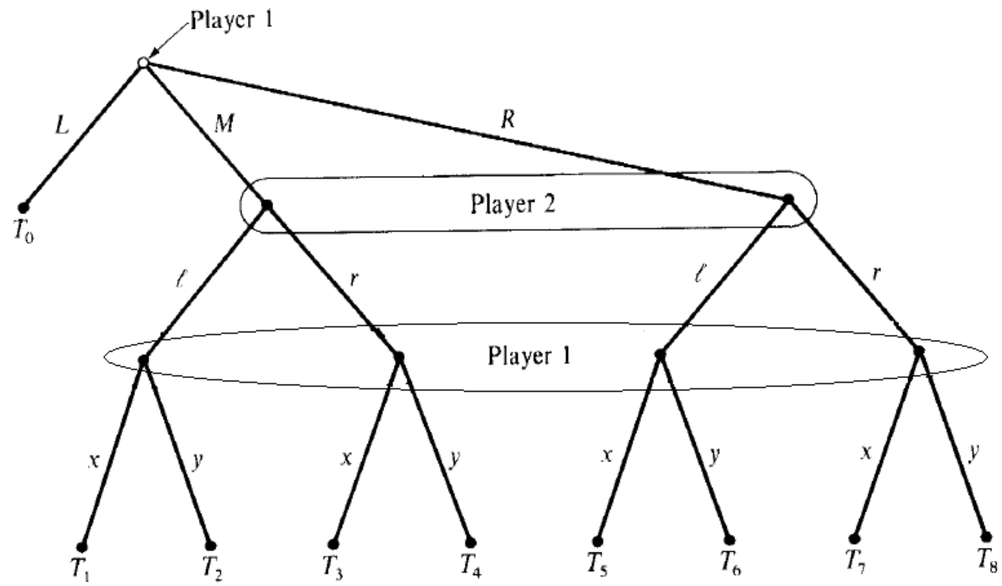
$$pr(T_3) = (p_5 + p_6)\sigma(r)\,, \qquad pr(T_4) = (p_7 + p_8)\sigma(r), \qquad pr(T_5) = (p_9 + p_{10})\sigma(l)$$

$$pr(T_6) = (p_{11} + p_{12})\sigma(l), \qquad pr(T_7) = (p_9 + p_{10})\sigma(r), \qquad pr(T_8) = (p_{11} + p_{12})\sigma(r)$$

حال استراتژی رفتاری معادل با استراتژی میکس بالا برابر است با:

در ابتدای بازی بازیکن ۱، L, M, R را به ترتیب با احتمالات $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$، $(p_5 + p_6 + p_7 + p_8)$، $(p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12})$ بازی کند. در مجموعه اطلاعات دوم بازیکن ۱، xو y را به ترتیب با احتمالات $\frac{p_5+p_6}{p_5+p_6+p_7+p_8}$ و $\frac{p_7+p_8}{p_5+p_6+p_7+p_8}$ و در مجموعه اطلاعات سوم xو y را به ترتیب با احتمالات $\frac{p_9+p_{10}}{p_9+p_{10}+p_{11}+p_{12}}$ و $\frac{p_{11}+p_{12}}{p_9+p_{10}+p_{11}+p_{12}}$ بازی کند.
با این استراتژی بار دیگر احتمال به‌دست آوردن گره‌های پایانی را حساب می‌کنیم و مشاهده می‌شود که همان احتمال‌هایی که در حالت استراتژی میکس به‌دست آوردیم در اینجا هم به‌دست می‌آیند. (به‌دست آوردن احتمالات به عهده دانشجو است)

d. در قسمت آخر سوال فرض شده‌است که مجموعه اطلاعات دوم و سوم برای بازیکن ۱ ترکیب شوند و بازی به‌صورت زیر شود. آیا در این حالت بازی perfect recall است؟ کدام یک از نتایج قسمت دوم و سوم همچنان برقرار است؟



همانطور که در شکل بالا مشاهده می‌شود، بازیکن ۱ در این حالت تنها دو مجموعه اطلاعات دارد و دو بار تصمیم می‌گیرد بنابراین استراتژی‌های او در این حالت به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش داده می‌شوند بازیکن ۱ در ابتدای بازی سه انتخاب دارد و در مجموعه‌اطلاعات دوم، دو انتخاب دارد (x,y) پس استراتژی‌های ممکن بازیکن ۱ به صورت زیر هستند و بازیکن۲ همچنان دو انتخاب دارد (l,r):

$$\{\{L, x\}, \{L, y\}, \{M, x\}, \{M, y\}, \{R, x\}, \{R, y\}\}$$

با تغییر دادن بازی، دیگر این بازی perfect recall نیست چراکه در مجموعه اطلاعات پایینی به نظر می‌رسد بازیکن اول نمی‌داند در کدام سمت قرار بگیرد به عبارتی گویا نمی‌داند خودش در دور قبلی که نوبتش بوده M انتخاب کرده یا R در حالیکه درصورتی بازی perfect recall است که بازیکن‌ها انتخاب‌های قبلی خود را فراموش نکرده باشند.

نتیجه قسمت b همچنان برقرار است یعنی برای هر استراتژی رفتاری بازیکن ۱، یک استراتژی میکس معادل آن وجود دارد. فرض کنید بازیکن ۱، استراتژی رفتاری زیر را استفاده کند:

در مجموعه اطلاعات اول بازیکن۱، L, M, R را به‌ترتیب با احتمالات p_1, p_2, p_3 و در مجموعه اطلاعات دوم x, y را به‌ترتیب با احتمالات q_1, q_2 بازی می‌کند. اگر بازیکن ۲ میکس استراتژی σ را بازی کند آنگاه احتمال به دست آوردن هرکدام از گره‌های پایانی به صورت زیر خواهد بود:

$$pr(T_0) = p_1, \qquad pr(T_1) = p_2\sigma(l)q_1, \qquad pr(T_2) = p_2\sigma(l)q_2$$

$$pr(T_3) = p_2\sigma(r)q_1\ , \qquad pr(T_4) = p_2\sigma(r)q_2, \qquad pr(T_5) = p_3\sigma(l)q_1$$

$$pr(T_6) = p_3\sigma(l)q_2, \qquad pr(T_7) = p_3\sigma(r)q_1, \qquad pr(T_8) = p_3\sigma(r)q_2$$

میکس استراتژی زیر معادل استراتژی رفتاری بالاست و احتمالات یکسانی برای گره‌های پایانی به دست می‌آید:

$\{L, x\}$ با احتمال p_1، $\{M, x\}$ با احتمال p_2q_1، $\{M, y\}$ با احتمال p_2q_2، $\{R, x\}$ با احتمال p_3q_1 و $\{R, y\}$ با احتمال p_3q_2.

اما نتیجه قسمت c همیشه برقرار نیست یعنی برای هر میکس استراتژی یک استراتژی رفتاری معادل آن وجود ندارد برای اثبات این موضوع کافیست یک مثال نقض ارائه دهیم.

فرض کنید بازیکن۱ از استراتژی میکسی استفاده می‌کند که $\{M, x\}$ و $\{R, y\}$ را با احتمال $\frac{1}{2}$ بازی می‌کند (سایر استراتژی‌ها را با احتمال صفر بازی می‌کند) . بازیکن ۲ نیز تنها استراتژی خالص l را بازی می‌کند (برخلاف قبل دیگر میکس بازی نمی‌کند). حال فرض کنید یک استراتژی رفتاری برای بازیکن ۱ وجود دارد که معادل میکس استراتژی گفته شده‌است به اینصورت که: در ابتدای بازی ، بازیکن۱، $\mathrm{L, M, R}$ را با احتمال p_1, p_2, p_3 بازی می‌کند و در مجموعه اطلاعات دوم x, y را با احتمال q_1, q_2 بازی می‌کند. حال احتمال به‌دست آوردن گره‌های پایانی را در هردو استراتژی به‌صورت زیر مینویسیم (دقت کنید که بازیکن ۲ فقط l را انتخاب می‌کند بنابراین گره‌هایی که از طریق انتخاب r توسط فرد دوم به‌دست می‌آیند احتمالشان صفر است زیرا فرد ۲ هیچوقت r را انتخاب نمی‌کند پس هیچوقت این گره‌ها را به‌دست نخواهند آورد):

$$mix \rightarrow \ pr(T_1) = pr(T_6) = \frac{1}{2}\ \ probability\ of\ others\ is\ zero$$

$$pr(T_0) = pr(T_2) = pr(T_3) = pr(T_4) = pr(T_5) = pr(T_7) = pr(T_8) = 0$$

$$behavior \rightarrow \ pr(T_3) = pr(T_4) = pr(T_7) = pr(T_8) = 0$$

$$pr(T_0) = p_1, \qquad pr(T_1) = p_2q_1, \qquad pr(T_2) = \ p_2q_2, \qquad pr(T_5) = p_3q_1, \qquad pr(T_6) = p_3q_2$$

برای اینکه دو استراتژی بالا برابر باشند باید احتمال هر گره پایانی در هردو استراتژی برابر باشد بنابراین داریم:

$$pr(T_1) = p_2q_1 = \frac{1}{2} \rightarrow p_2, q_1 \neq 0 \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$pr(T_2) = p_2 q_2 = 0 \;\; from\ (1) we\ know\ p_2 \neq 0\ so\ q_2 = 0$$

$$then\ we\ must\ have \quad pr(t_6) = p_3 q_2 = 0 \;\; contradiction$$

بنابراین استراتژی رفتاری‌ای وجود ندارد که معادل میکس استراتژی بالا باشد.

بطور کلی می‌توان نتیجه گرفت که در بازی‌هایی که perfect recall نیستند برای هر استراتژی رفتاری یک میکس استراتژی معادل آن وجود دارد ولی برای هر میکس استراتژی یک استراتژی رفتاری معادل آن وجود ندارد.